

Moto di una goccia d'acqua in olio d'oliva

(Pervenuto il 20.9.1996, approvato il 11.1.1997)

ABSTRACT

The falling motion of a drop of distilled water inside a transparent graduated cylinder containing domestic olive oil was studied. The results of the measurements taken were worked out so that a direct proportionality between the velocity of the drop and the area of its maximum cross section could be verified. In this way the validity of Stokes' law concerning the motion of spherical bodies in viscous fluids was confirmed.

Introduzione

L'esperienza che presentiamo è stata proposta nel nostro istituto dopo aver affrontato il moto del punto materiale nel vuoto sia sotto l'aspetto cinematico che dinamico.

Con questo esperimento si studia una situazione nella quale non è possibile trascurare, ma anzi è essenziale tener conto, degli effetti del mezzo sul moto di un corpo.

Questi effetti diventano particolarmente importanti quando forze come la spinta di Archimede e la resistenza del mezzo non sono più trascurabili; in tali circostanze il moto che ne deriva può presentarsi in modo assai diverso da quello previsto in aria.

Tra le forze che il mezzo provoca, la spinta di Archimede è quella più nota agli studenti perché viene introdotta nello studio dell'idrostatica e numerose sono le esercitazioni di laboratorio in questo ambito; viceversa il moto di un corpo in presenza di una forza resistente è un argomento che di rado viene affrontato perché, da un punto di vista fisico, presenta una forza variabile con la velocità e, quindi, da un punto di vista matematico, significa proporre agli studenti la risoluzione di una equazione differenziale che, normalmente, non sanno affrontare all'inizio del triennio. Nell'esecuzione pratica, inoltre, ci sono dei problemi per effettuare misure ripetibili nelle stesse condizioni; ad esempio ripescare un oggetto lasciato cadere in un liquido o avere più oggetti identici per ripetere le misure. Anche la temperatura dell'ambiente in cui si opera deve essere mantenuta il più possibile costante, se non vogliamo modificare la viscosità del mezzo.

Uno studio sulla caduta di sferette in presenza di un mezzo resistente può essere effettuato con la tecnica della fotografia stroboscopica che permette di calcolare la velocità di caduta direttamente

dalle foto ottenute [1]. Tale tecnica è particolarmente efficace per dimostrare lo scostamento che esiste tra la legge di caduta di un corpo nel vuoto e quella in un mezzo resistente quando lo stato di moto non è ancora stazionario.

Se si decide di proporre l'argomento coinvolgendo gli studenti in misure durante il moto del corpo, è quasi obbligatorio porsi nella situazione più semplice in cui il moto del fluido rispetto al corpo è di tipo laminare. Ciò implica che la velocità del corpo rispetto al fluido non debba superare un valore critico che dà origine a scie vorticosi; in questo caso si può ammettere che la resistenza del mezzo F sia proporzionale alla velocità v del corpo e alla viscosità μ del fluido. Infatti, nel caso di corpi sferici, viene data la seguente relazione [2]:

$$F = -K \mu v \quad (1)$$

dove:

$$K = 6 \pi R \quad (2)$$

con R raggio del corpo sferico.

L'equazione (1) è nota come LEGGE O FORMULA DI STOKES.

L'idea di impiegare, per questa esperienza, gocce di acqua distillata in caduta in un bagno d'olio non è originale [3] e presenta molti vantaggi:

- impiego di corpi sferici non massicci;
- facili misure di volumi con pipette graduate;
- piccole differenze di densità tra corpo e liquido;
- misura di tempi di caduta relativamente lunghi.

Il modello matematico necessario è quello relativo alla caduta di un corpo sferico rigido di peso P in un mezzo che offre resistenza F proporzionale alla velocità di caduta ed in presenza di una spinta di Archimede S .

L'equazione del moto è dunque:

$$P + S + F = m \, dv/dt$$

Ipotizzando un moto unidimensionale con verso positivo dall'alto al basso si ha:

$$(m - m_f)g - K\mu v = m dv/dt \quad (3)$$

dove: m = massa del corpo;

m_f = massa del fluido spostato;

v = velocità istantanea;

g = accelerazione di gravità.

La soluzione dell'eq. (3) con la condizione $v(0) = 0$ è data da:

$$v(t) = v_L \cdot [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (4)$$

con:

$$v_L = [(m - m_f)g] / (K\mu) = [(m - m_f)g] / (6\pi R\mu) \quad (5)$$

$$\tau = m / (K\mu) = m / (6\pi R\mu) \quad (6)$$

La fig.1 rappresenta l'andamento di v/v_L in funzione del rapporto t/τ . Si nota chiaramente che se $t \approx 4\tau$ il moto diventa in pratica stazionario con velocità costante v_L . Introducendo:

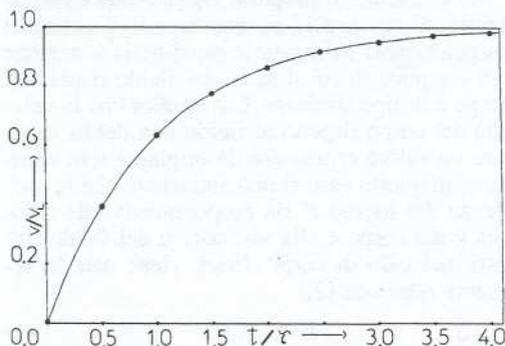


Fig. 1

ρ : densità del corpo sferico;

ρ_f : densità del fluido,

l'eq. (5) si può riscrivere nel modo seguente:

$$v_L = [(\rho - \rho_f) 4/3 \pi R^3 g] / (6\pi R\mu) = (2g/9) (\Delta\rho/\mu) R^2$$

con: $\Delta\rho = \rho - \rho_f$.

Ponendo infine $A = \pi R^2$, area della sezione trasversale massima della sfera (sezione resistente), si ottiene:

$$v_L = (2g/9\pi) (\Delta\rho/\mu) A = 0.69 \cdot (\Delta\rho/\mu) \cdot A \quad (7)$$

L'eq. (7) afferma che per un dato valore di $\Delta\rho$ e μ , tra v_L ed A esiste una diretta proporzionalità.

Per acqua distillata e olio di oliva di uso domestico (a 20°C) i dati tabulati danno i seguenti valori [4]:

$$\Delta\rho = 80 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\mu = 84 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Tenendo conto che A si misura in m^2 , si deduce:

$$v_L = 0.69 \cdot (80 / 84 \cdot 10^{-3}) \cdot A = 657 \cdot A \text{ m/s.}$$

Ai fini dell'esperienza conviene esprimere A in mm^2 e v_L in mm/s . Dall'equazione precedente si ottiene:

$$v_L = 0.657 \cdot A \text{ mm/s.} \quad (8)$$

Per quanto riguarda il valore di τ teorico si ha:

$$\begin{aligned} \tau &= m / (6\pi R\mu) = (4/3 \pi R^3 \rho) / (6\pi R\mu) = \\ &= (2/9\pi) (\rho A / \mu) \end{aligned}$$

cioè:

$$\tau = 0.07 (\rho/\mu) A$$

Sostituendo i valori:

$$\tau = 0.07 \cdot (103/84 \cdot 10^{-3}) \cdot A = 833 \cdot A \text{ s.}$$

Ponendo $A = 20 \text{ mm}^2 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ (sezione tipica delle gocce usate) segue $\tau \approx 0.02\text{s}$.

In pratica il moto della goccia è subito rettilineo uniforme.

La validità della legge di Stokes presuppone che il moto della goccia sia laminare. Tale ipotesi può essere verificata a priori calcolando il numero di Reynolds R_2 così definito:

$$R_2 = (\rho_f / m) \cdot v_L \cdot R$$

Tenendo conto dei dati tabulati si ricava:

$$\begin{aligned} R_2 &= (0.92 \cdot 10^3 / 84 \cdot 10^{-3}) \cdot (657A) \cdot (A/\pi) 1/2 = \\ &= (4.0 \cdot 10^6) \cdot A^{3/2} \end{aligned} \quad (9)$$

La legge di Stokes si può ritenere accettabile se [5]:

$$R_2 < 1 \quad (10)$$

Realizzazione dell'esperienza

Per svolgere la nostra esperienza abbiamo impiegato:

- 1 cilindro graduato trasparente di vetro (altezza: 32 cm; diametro interno: 3,6 cm; capacità nominale: 250 ml);
- 1 pipetta graduata (capacità nominale: 200 mm^3 ; sensibilità: 1 mm^3);
- 1 cronometro digitale di tipo manuale (sensibilità: 0.01 s) con le funzioni *start - stop - lap - reset*.

Si versa nel cilindro l'olio di oliva **fino all'orlo** almeno mezz'ora prima della prova per stabilizzarne la temperatura; quindi occorre prestare attenzione a due circostanze: che non si sporchi la superficie con il pulviscolo e che il cilindro non venga spostato per evitare il formarsi di turbolenze al suo interno.

L'impiego del cilindro graduato consente di ridurre gli errori di parallasse, nelle misure degli spazi, sfruttando le linee serigrafate sul vetro (nel nostro caso la distanza tra due tacche successive è di 19 mm). Mediante la pipetta graduata si possono formare delle gocce di acqua distillata di volume noto compreso tra 15 mm³ e 25 mm³, valori che permettono di ottenere delle buone misure nei tempi di caduta. Tenendo leggermente inclinata la pipetta la goccia di acqua rimane attaccata alla punta e per staccarla basta depositarla delicatamente sulla superficie libera dell'olio.

A causa della tensione superficiale la goccia galleggia e affinché possa iniziare il suo moto di caduta è necessario sospingerla leggermente verso il basso con la testa di un chiodo facendo molta attenzione a non romperla.

Il cronometro viene azionato con la funzione *start* in corrispondenza della prima tacca serigrafata, sfruttando lo spazio morto di testa del cilindro, per stabilizzare il moto della goccia. Le tacche successive permettono di misurare gli spazi in corrispondenza dei quali verranno registrati gli intervalli di tempo necessari a percorrerli. Per effettuare tale registrazione si utilizza la modalità *lap*, che permette la lettura sul "display" dei tempi parziali senza arrestare il conteggio totale dei secondi. Quando la goccia giunge sull'ultima tacca serigrafata si aziona la funzione *stop* per la lettura finale. La funzione *reset* permette l'azzeramento del "display".

Dal grafico spazio-tempo è possibile verificare se il moto è rettilineo uniforme e in tal caso calcolare la velocità della goccia.

L'area *A* della sezione resistente della goccia si può ricavare dal volume *V* misurato con la pipetta mediante i seguenti passaggi:

$$V = 4/3 \pi R^3$$

$$A = \pi R^2$$

da cui:

$$A = \pi (3V/4\pi)^{2/3} \cong 1.21 \cdot V^{2/3} \quad (11)$$

Nota l'area *A* della goccia è possibile calcolare il numero di Reynolds dall'eq. (9) e controllare se è in accordo con la disuguaglianza (10). In tal caso la legge di Stokes si può considerare valida e può essere verificata sperimentalmente tramite l'eq. (8).

Per gli scopi della prova, non è strettamente indispensabile presentare agli studenti i passaggi matematici risolutivi dell'equazione del moto (3). Si può fornire loro la soluzione data dall'eq. (4),

commentare l'andamento della Fig. 1 e dedurre l'eq. (8) come presentata nell'introduzione.

Se l'esperienza conduce ad una diretta proporzionalità tra la velocità *v* e l'area *A* della goccia, sarà possibile affermare che la legge di Stokes è stata verificata e quindi ritenere che il modello di corpo sferico rigido sia valido per le gocce di acqua in moto nell'olio di oliva.

Analisi e dati sperimentali

I dati utilizzati in questo lavoro sono stati ottenuti da un gruppo di studenti di una classe terza.

Nella Tab. 1 abbiamo riportato i valori degli spazi e dei tempi per sei gocce d'acqua di volume compreso tra 15 mm³ e 25 mm³. Abbiamo supposto l'incertezza di 1mm sulle misure della distanza tra le tacche del cilindro (pari alla sensibilità del righello). L'errore sperimentale sui tempi è stato valutato tenendo conto del tempo di reazione dell'operatore supposto pari a 0.3 s.

La Fig. 2, relativa ai valori della Tab. 1, conferma la previsione di un moto rettilineo uniforme per tutte le gocce esaminate nel limite degli errori sperimentali (i numeri a fianco di ciascuna retta indicano a quale goccia si riferisce). Ai fini della rappresentazione grafica è stata considerata solo l'incertezza sui tempi essendo trascurabile quella relativa alla misura della distanza tra le tacche del cilindro. Si nota che

Tab. 1 - Tabella degli spazi e tempi

$V(\pm 1 \text{ mm}^3)$	15	17	19	21	23	25
$t(\pm 0.3s)$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
19	3.8	3.6	3.4	3.1	2.9	2.7
38	7.7	7.1	6.9	6.5	5.9	5.5
57	11.6	11.0	10.9	10.5	9.0	8.6
76	15.2	14.5	14.3	13.7	12.0	11.3
95	19.0	18.3	17.6	17.2	15.1	14.2
114	23.0	22.0	21.0	20.7	18.1	17.4
133	26.5	25.8	24.8	24.1	21.2	20.0
152	30.1	29.2	28.4	27.5	24.2	23.2
171	34.1	33.2	31.8	31.1	27.4	25.9
190	38.0	36.7	35.3	34.6	30.7	28.9

Tab. 2 - Tabella Volume, Area e Velocità

Volume (V)	Area (A)	Velocità (v)
15±1	7.4±0.3	4.9±0.1
17±1	8.0±0.3	5.3±0.2
19±1	8.6±0.3	5.6±0.2
21±1	9.2±0.3	5.8±0.2
23±1	9.8±0.3	6.2±0.2
25±1	10.3±0.3	6.5±0.1
mm ³	mm ²	mm/s

la pendenza della retta aumenta all'aumentare del volume della goccia; infatti un incremento di volume implica un aumento dell'area della sezione resistente e quindi della velocità in accordo con l'eq. (8).

Per determinare il valore della velocità di ogni singola goccia abbiamo calcolato il coefficiente angolare medio della retta interpolante i dati. È possibile infatti individuare sul grafico spazio-tempo le due rette di pendenza massima e minima compatibili con gli errori sperimentali, calcolare i coefficienti angolari ed eseguire la media dei due valori. L'incertezza sul valore della velocità è stata assunta pari alla semidifferenza dei due coefficienti angolari calcolati precedentemente. È consigliabile eseguire i calcoli precedenti tracciando i grafici spazio-tempo su fogli separati, uno per ciascuna goccia.

Nella Tab. 2 sono riportati il volume, l'area della sezione resistente della goccia e la rispettiva velocità. L'errore sul volume è pari alla sensibilità della pipetta graduata (1 mm^3), mentre l'errore assoluto sull'area $\varepsilon_a(A)$ è stato valutato considerando l'eq. (11) e calcolando l'errore relativo $\varepsilon_r(A)$:

$$A = 1.21 \cdot V^{2/3}$$

$$\varepsilon_r(A) = 2/3 \cdot \varepsilon_r(V) \cong 0.67 \cdot \varepsilon_r(V)$$

$$\varepsilon_a(A) = \varepsilon_r(A) \cdot A$$

È possibile valutare il numero di Reynolds per la sezione resistente di area massima tra quelle presentate in Tab. 2.

Dall'eq. (9) si ottiene:

$$R_2 = (4.0 \cdot 10^6) \cdot (10.3 \cdot 10^{-6})^{3/2} = 0.13 < 1$$

Questo risultato permette di affermare che il moto della goccia è laminare come per le gocce di area inferiore perché per esse è ancora valida la disuguaglianza (10).

Nella Fig. 3 abbiamo riportato i valori della velocità v in funzione dell'area A delle gocce esaminate. La retta tratteggiata rappresenta la retta teorica corrispondente alla diretta proporzionalità espressa dall'eq. (8).

L'ipotesi che la goccia d'acqua sia una sfera rigida durante il moto di caduta sembra valida per gocce di volume compreso tra 15 mm^3 e 20 mm^3 poiché per esse l'accordo con la retta teorica è buono. Al di sopra di tale intervallo, la Fig. 3 presenta dati sperimentali attesi leggermente inferiori a quelli teorici. Probabilmente la velocità di caduta della goccia determina una maggiore resistenza del mezzo che provoca una deformazione della forma sferica. Ciò potrebbe comportare un aumento della sezione resistente della goccia con conseguente riduzione della velocità misurata rispetto a quella teorica. Gocce di volume superiore a 25 mm^3 non sono state prese in considerazione a causa dei tempi di caduta eccessivamente brevi per poter essere misurati con un cronometro manuale. Gocce di volume inferiore a 15 mm^3 non sono facilmente ottenibili con una semplice pipet-

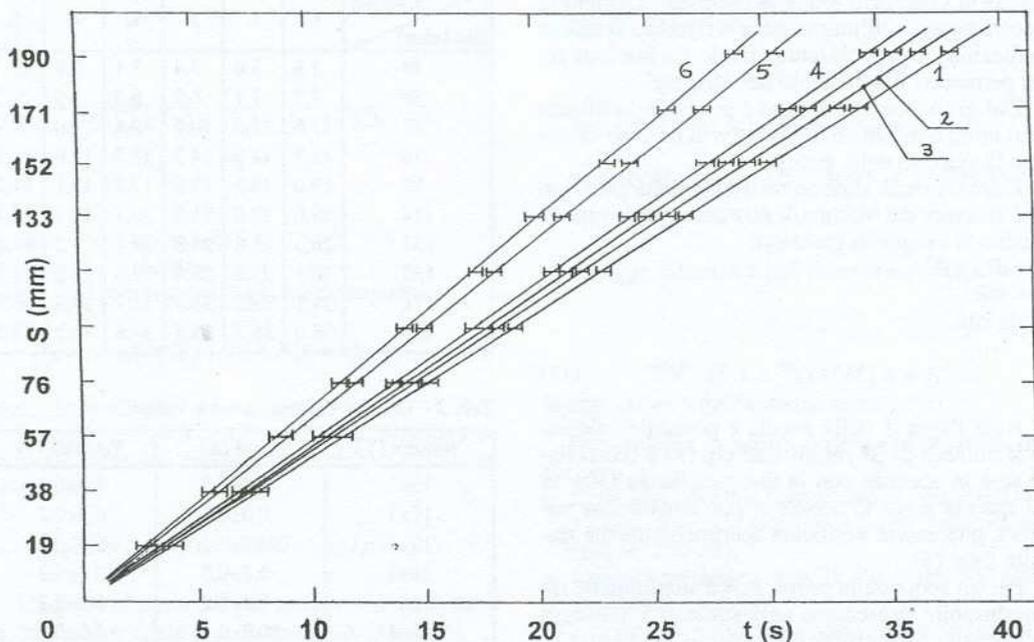


Fig. 2 - Grafico Spazio-Tempo

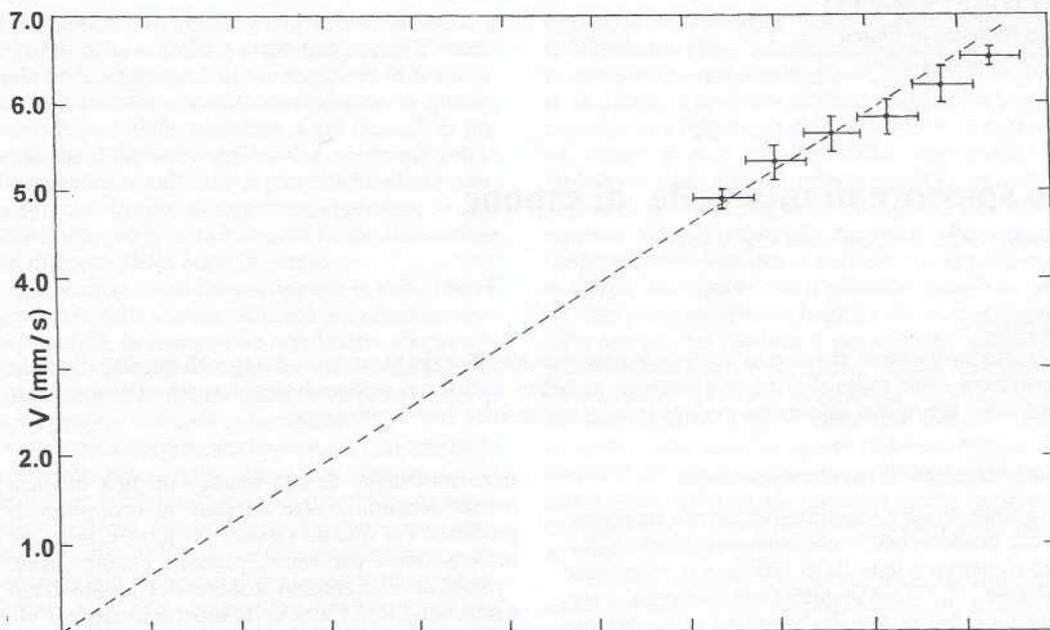


Fig. 3 - Grafico Velocità Area

ta graduata a causa dei notevoli errori di misura del volume (in questi casi occorre impiegare strumenti più raffinati, come per esempio micropipette automatiche a dosaggio variabile, che però non costituiscono "materiale povero" per un laboratorio didattico).

Inoltre gocce di piccolo volume, a causa della bassa velocità di caduta, risentono eccessivamente dei possibili sbalzi termici che originano moti convettivi e cambiamenti nella viscosità del mezzo. Sulla base di queste considerazioni, si è pensato di limitare lo studio alle gocce i cui volumi sono presentati in Tab. 2.

Conclusioni

L'esperienza presentata è stata proposta nel nostro istituto con due diverse finalità:

- Studio del moto rettilineo uniforme.
- Verifica della legge di Stokes.

Moto rettilineo uniforme.

Con questa esperienza tutti i gruppi di lavoro hanno ottenuto ottimi risultati dal punto di vista della verifica della legge. È importante sottolineare che l'allestimento non ha richiesto particolari difficoltà, in quanto è stato impiegato materiale di facile reperibilità a costi estremamente ridotti.

Inoltre la facile ripetibilità delle misure in tempi contenuti ha consentito agli studenti una autovalutazione delle possibili cause di errore.

Legge di Stokes

Il semplice calcolo del numero di Reynolds permette di controllare se il moto della goccia è laminare. In tal caso la diretta proporzionalità tra velocità e area della sezione resistente può consentire la verifica della legge. La determinazione del volume della goccia rappresenta la maggior causa di errore in quanto legata alla scarsa manualità degli studenti con la pipetta graduata. Abbiamo infatti verificato che è consigliabile far esercitare gli studenti all'uso di questo strumento per ottenere risultati più attendibili.

I dati presentati sono relativi al gruppo di lavoro che ha operato nel modo migliore dal punto di vista pratico. Tutti i gruppi, comunque, hanno ottenuto risultati simili nell'intervallo dei valori presentati in Tab. 1 e Tab. 2.

Bibliografia

- [1] M. BELLODI, M. FRANCESIO, G. PEZZI, *Laboratorio di fisica e informatica*, Zanichelli, Bologna, 237-254, (1994).
- [2] P. FLEURY, J.P. MATHIEU, *Meccanica fisica*, Zanichelli, Bologna, 445, (1970).
- [3] U. AMALDI, *Fisica per temi, laboratorio*, Zanichelli, Bologna, F65-F67, (1995).
- [4] *Le tavole M-A-F-BI-C*, Zanichelli, Bologna, 22, (1989).
- [5] E. PERUCCA, *Fisica Generale e Sperimentale*, Vol. I, Utet, Torino, 566, (1960).