

## L'interferometro:

### L'interferenza:

Tutti i fenomeni ondulatori hanno una ben precisa caratteristica: quando due (o più) onde di qualsiasi natura si trovano ad incidere in uno stesso punto dello spazio si sovrappongono dando origine al fenomeno dell'**interferenza**.

In particolare, si può avere:

- **interferenza distruttiva** quando l'effetto complessivo della sovrapposizione porta ad un indebolimento dell'effetto della singola onda;
- **interferenza costruttiva** quando l'effetto complessivo della sovrapposizione porta ad un rafforzamento dell'effetto della singola onda.

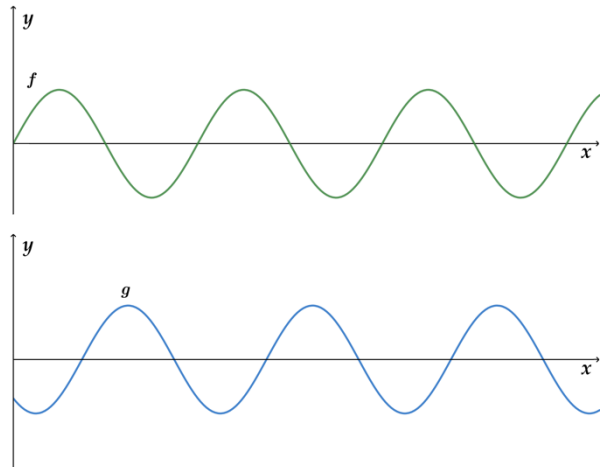
Consideriamo ad esempio le due onde  $f$  e  $g$  nella figura sottostante: esse saranno descritte da due funzioni del tipo:

$$f: \quad y_f = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$g: \quad y_g = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

dove  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono la fase dell'onda, una costante che tiene conto delle condizioni iniziali dell'oscillazione.

Quando le due onde interferiscono sommandosi in un punto (considerando per



semplicità il caso in cui entrambe si propagano lungo una retta), l'onda risultante ha la forma:

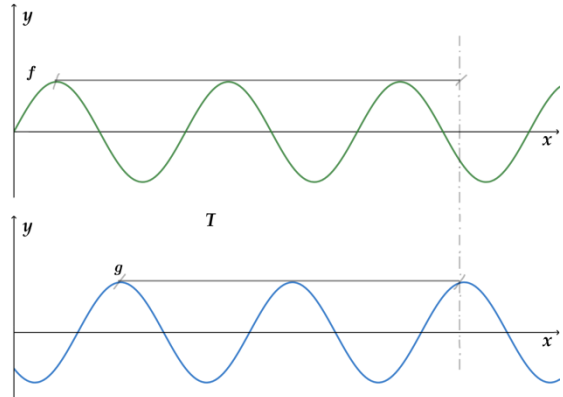
$$f + g: \quad y = y_f + y_g = 2A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Perciò, posto  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  lo sfasamento delle due onde, si vede che:

- se  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$  cioè se lo sfasamento è pari a multipli dispari di  $\pi$ , le due onde sono in opposizione di fase (se una è ad un massimo, l'altra è ad un minimo) e l'interferenza sarà distruttiva;
- se  $\Delta\varphi = 2m\pi$  cioè se lo sfasamento è uguale a multipli pari di  $\pi$ , le due onde sono in fase (se una è a un massimo o a un minimo, anche l'altra lo è) e l'interferenza sarà costruttiva.

Questo sfasamento in angoli può essere riportato facilmente a una differenza del cammino che le onde percorrono.

Come si può vedere infatti dall'immagine di lato, all'istante  $t = 0$ , la posizione nelle due onde lungo l'asse  $x$  di un punto di riferimento (ad esempio il primo massimo) è differente. Questo significa che lo sfasamento in termini angolari delle due onde corrisponde anche ad uno sfasamento nella distanza percorsa dalle onde: se quindi ad esempio entrambi i primi massimi devono raggiungere la linea tratteggiata, il massimo dell'onda  $f$  impiegherà più tempo rispetto a quello dell'onda  $g$  (a parità di velocità dell'onda) perché dovrà percorrere un tragitto più lungo.



Per quantificare lo sfasamento nei termini di una distanza, si introduce un analogo della velocità angolare  $\omega = 2\pi/T$  (che fornisce un'indicazione su quanto rapidamente viene percorso un angolo giro): è il **numero d'onda**  $k = 2\pi/\lambda$ , una caratteristica costante di un'onda che indica quante lunghezze d'onda (quanti picchi o minimi) ci sono in un angolo giro.

Di conseguenza, poiché  $k$  è costante, se le onde sono sfasate di una quantità angolare  $\Delta\varphi$ , allora lo sfasamento  $\Delta l$  nella distanza percorsa, detto **differenza di cammino**, sarà:

$$2\pi : \lambda = \Delta\varphi : \Delta l$$

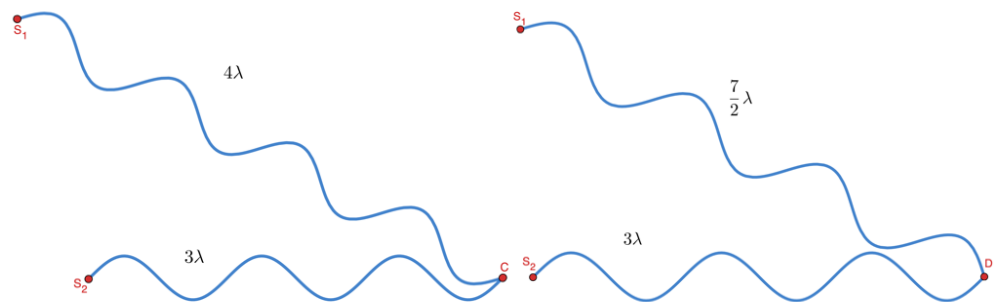
$$\Delta l = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{k}$$

Allora nei termini della differenza di cammino, le condizioni di interferenza diventano:

<i>Interferenza costruttiva</i>	$\Delta l = m \cdot \lambda$
<i>Interferenza distruttiva</i>	$\Delta l = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$

Queste due condizioni valgono in modo del tutto generale anche quando si hanno due onde che interferiscono in un punto dello spazio (non solo lungo una retta) come ad esempio

nell'immagine di lato dove a questo punto la differenza di cammino è determinata dalla differenza della



distanza percorsa dalle due onde, ovvero dalla differenza  $\overline{S_1C} - \overline{S_2C}$  e  $\overline{S_1D} - \overline{S_2D}$ .

## La luce:

Nel 1600 si era affermato circa la natura della luce il modello corpuscolare proposto da Newton: derivandolo dallo studio della luce solare, egli dedusse che questa era composta da un insieme di particelle di diverso colore che potevano essere rese visibili con il fenomeno della dispersione, facendo passare un raggio luminoso attraverso un prisma.

All'inizio dell'800 vennero condotti altri esperimenti per testare l'efficacia di questo modello che mostrava qualche punto di criticità.

Tra questi, quello della doppia fenditura di Young: consideriamo per semplicità una sola fenditura e uno schermo posto ad una certa distanza  $L$ . Se la si illumina con della luce monocromatica, supponendo che quest'ultima sia composta da particelle che si propagano in direzione rettilinea, quello che si ottiene è che verrà illuminata una zona sullo schermo ampia tanto quanto la fenditura. Tutte cioè le particelle che attraversano la fenditura proseguono il loro viaggio indisturbate verso lo schermo come se viaggiassero su dei binari mentre quelle che non l'attraversano non illuminano lo schermo: la zona illuminata ha una superficie uguale a quella della fenditura<sup>1</sup>.

Vediamo quindi cosa può succedere con due fenditure poste ad una distanza  $d$  molto più piccola della distanza dallo schermo ( $d \ll L$ ): ancora una volta se la luce è composta da particelle ci si dovrebbe aspettare di avere due zone luminose in corrispondenza delle fenditure per gli stessi motivi di prima. La luce attraversa le due fenditure e quindi, propagandosi in direzione rettilinea, raggiunge un punto ben preciso sullo schermo, venendosi a formare quindi due sole aree luminose con confini netti.

Quello che invece si nota sullo schermo è che compaiono frange luminose alternate a frange scure ovvero si forma una classica figura di **interferenza**:

- le frange luminose sono quelle zone dove si ha interferenza costruttiva;
- le frange scure sono quelle zone dove si ha interferenza distruttiva.

Il risultato inatteso dell'esperimento è compatibile con un'ipotesi diversa da quella di Newton: la luce ha una natura ondulatoria e non corpuscolare.

L'esperimento della doppia fenditura di Young  
evidenzia la natura ondulatoria della luce

La luce quindi si comporta come un'onda: quando l'onda piana investe le due fenditure, per il principio di Huygens, queste due si comportano a loro volta come due sorgenti di onde

---

<sup>1</sup> In realtà ciò non avviene in quanto si ha il fenomeno della *diffrazione* se la fenditura è sottile, in quanto la luce si comporta in quest'esperimento come un'onda.

sferiche in fase (in quanto generate dalla stessa onda), dando origine poi il fenomeno dell'interferenza.

### L'interferometro:

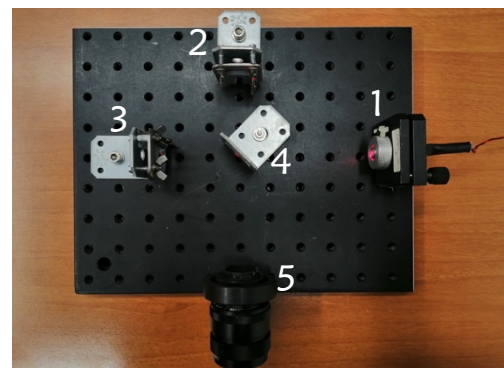
Come mostra l'esperimento di Young, la figura di interferenza si forma in quanto la luce si comporta come onda e da ciascuna delle due fenditure i vari raggi dell'onda percorrono distanze diverse: questa differenza di cammino genera la figura di interferenza.

Esistono altri strumenti che consentono di generare figure di interferenza facendo percorrere alla luce distanze differenti: sono gli interferometri.

Una famosa configurazione utilizzata per l'interferometria ottica (che riguarda quindi l'analisi dell'onda elettromagnetica visibile) è quella di Michelson-Morley, ideata dal fisico Albert Abraham Michelson ed utilizzata in un famoso esperimento nel 1887 insieme al fisico Edward Williams Morley per cercare di determinare la velocità dell'etere rispetto alla Terra.

L'interferometro di Michelson-Morley è mostrato in figura ed è costituito nella sua forma più semplice da 4 elementi:

- una sorgente laser (1)
- due specchi posti nella stessa direzione di propagazione della luce dalla sorgente ed in direzione perpendicolare (2-3)
- un beam-splitter, uno specchio semi-trasparente, posto a  $45^\circ$  rispetto al laser (4)

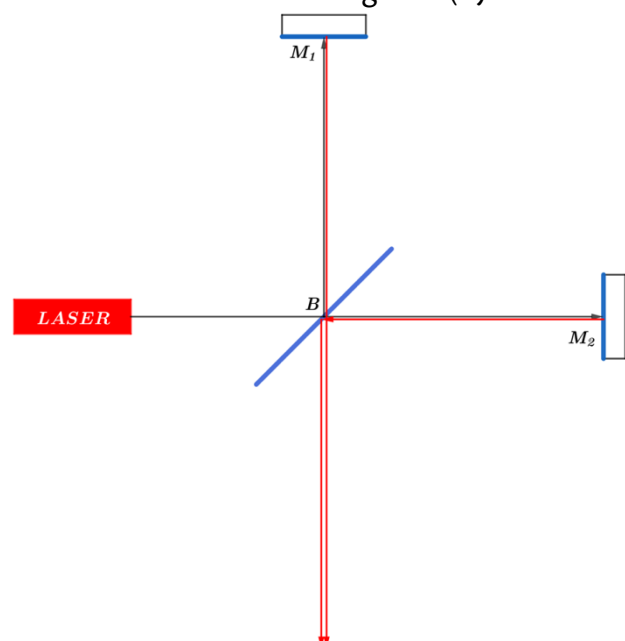


In aggiunta la configurazione mostrata in figura ha anche una lente divergente (5).

Come funziona lo strumento?

I fotoni vengono emessi dal laser e viaggiano verso il beam-splitter (B): metà del raggio prosegue la propria propagazione in direzione rettilinea verso lo specchio ( $M_2$ ) mentre l'altra metà viene riflessa a  $90^\circ$  verso l'altro specchio ( $M_1$ ).

Dopo essere stati riflessi dagli specchi, le due onde luminose si propagano indietro verso il beam-splitter e qui si ricongiungono: lì le due onde si sommano generando l'interferenza.



Il fenomeno in realtà non dovrebbe avvenire se i due bracci (distanza  $BM_1$  e  $BM_2$ ) fossero esattamente equidistanziati: il fenomeno di interferenza dipende infatti dalla differenza di cammino percorso dal laser (moltiplicato per l'indice di rifrazione del mezzo nel quale si sta propagando). Se la differenza è pari a un numero intero  $n$  di lunghezze d'onda si ha un'interferenza costruttiva, se pari a un numero frazionario  $n/2$  di lunghezze d'onda un'interferenza distruttiva.

Supponiamo che la distanza che la luce percorre tra il beam-splitter e ciascuno degli specchi sia pari a  $L$ . Quando i due raggi luminosi si ricombinano nel beam-splitter, la differenza di cammino ottico sarà pari a:

$$\Delta = |2L - 2L| \cdot n_{aria} = 0$$

Essendo nulla la differenza di cammino ottico, le due onde non risultano essere sfasate e di conseguenza non ci dovrebbe essere alcun fenomeno di interferenza da osservare.

In realtà quello che accade è che i due bracci dell'interferometro non sono precisamente uguali o meglio non lo sono su scala della lunghezza d'onda del laser. Rispetto perciò a quest'ultima si dovrebbe verificare che le due distanze siano precise al nanometro: infatti la luce riesce ad apprezzare variazioni di distanze molto più piccole di quelle che possiamo misurare con un metro.

Per dire che i due bracci dell'interferometro sono lunghi uguali, occorrerebbe poter essere in grado di apprezzare un'equivalente variazione di 10 cm su 1000 km: il che sarebbe come dire che, andando da Roma a Monaco di Baviera, se partissi da un certo luogo o 10 cm più avanti, potrei essere in grado di apprezzare questa differenza nel tempo di viaggio.

Questa differenza impercettibile ai nostri occhi consente però di poter osservare le frange di interferenza.

Chiameremo allora  $L_1 = L + \Delta L_1$  la distanza tra lo specchio  $M_1$  e il beam-splitter e  $L_2 = L + \Delta L_2$  la distanza tra lo specchio  $M_2$  e il beam-splitter dove la quantità  $\Delta L_1$  e  $\Delta L_2$  indicano questa piccola differenza nella lunghezza di ciascuno dei due bracci.

Allora la differenza di cammino ottico tra le due onde sarà:

$$\Delta = n \cdot |\text{differenza di cammino}| = n \cdot |2L_2 - 2L_1| = 2n|\Delta L_1 - \Delta L_2| \equiv 2n \cdot d$$

dove  $d$  è il modulo della differenza tra  $\Delta L_1$  e  $\Delta L_2$ .

La risultante differenza di fase sarà:

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot 2d$$

Ora il raggio che percorre il braccio  $M_2B$  va incontro a due riflessioni, una sullo specchio  $M_1$  l'altra sul beam-splitter mentre il raggio che percorre il braccio  $M_1B$  va incontro a una sola riflessione sullo specchio  $M_1$ . Ciò fa sì che esso venga sfasato ulteriormente di un angolo  $\pi$ . Infatti se consideriamo nuovamente che l'onda della luce sia descritta da una funzione del tipo  $E = E_0 \cos(kx + \omega t)$  allora l'onda riflessa viene descritta dalla funzione:

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0 \cos(kx + \omega t)$$

dove  $n_1$  è l'indice di rifrazione del mezzo dal quale proviene l'onda e  $n_2$  l'indice di rifrazione del mezzo che riflette l'onda. Nel caso in cui  $n_2 > n_1$  (come in questo caso, in quanto  $n_{\text{vetro}} > n_{\text{aria}}$ ) allora  $n_1 - n_2 < 0$  e possiamo riscrivere come:

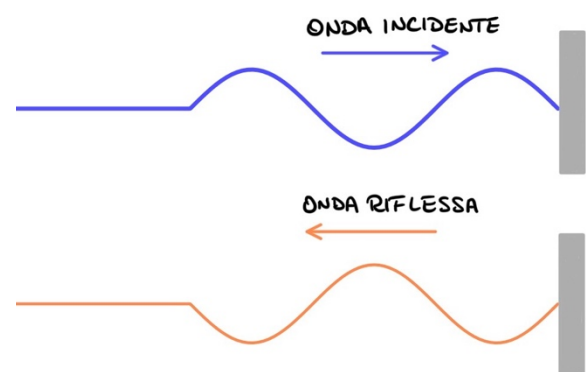
$$E_r = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E_0 \cos(kx + \omega t)$$

Ma per le proprietà trigonometriche  $-\cos \alpha = \cos(\alpha \pm \pi)$  ovvero:

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E_0 \cos(kx + \omega t \pm \pi)$$

Indipendentemente ora dal segno del  $\pi$ , è importante evidenziare come l'onda riflessa  $E_r$  ha guadagnato una differenza di fase di  $\pi$  rispetto all'onda incidente  $E$ .

Il comportamento è analogo a quella di un'onda che si propaga su una corda fissata ad una parete. Quando raggiunge l'estremità fissa e viene riflessa indietro, l'onda riflessa è sfasata rispetto a quella incidente di  $\pi$  (che equivale ad uno sfasamento di mezza lunghezza d'onda) come si vede dalla figura a lato dove ad ogni cresta e ventre dell'onda riflessa corrispondono rispettivamente ventri e creste dell'onda incidente.



Questo ci dice quindi che alla differenza di fase  $\Delta\varphi$  sopra definita occorre aggiungere un termine  $\pi$  dovuta alla singola riflessione del raggio nel braccio  $M_1B$ :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot 2d - \pi$$

La condizione ora di interferenza costruttiva è che la differenza di fase sia un multiplo semi-intero  $m + 1/2$  di  $2\pi$  da cui si ricava che

$$2n \cdot d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$

Se ora viene modificata la differenza di cammino dei due raggi tale per cui da  $d \Rightarrow d'$  muovendo ad esempio la posizione di uno dei due specchi allora l'intensità della luce nello schermo in un punto comincerà ad aumentare e diminuire via via che vi transiterà sopra massimi e minimi di interferenza successivi. Alla fine si avrà una nuova configurazione per la quale varrà un'analogia legge  $2nd' = \left(m' + \frac{1}{2}\right)\lambda$ .

Contando il numero  $N = \Delta m = m' - m$  di massimi o minimi successivi che transitano, si può calcolare l'entità dello spostamento  $\Delta d = d' - d$  come:

$$2 \cdot n \cdot \Delta d = N\lambda$$

In generale quest'equazione è molto importante perché nel mentre si modifica di  $\Delta d$  la differenza di cammino che i raggi percorrono, si possono contare il numero  $N$  di frange (massimi o minimi) che passano sullo schermo e queste due grandezze sono legate dalla relazione:

$$2n \Delta d = N\lambda$$

Questa relazione verrà utilizzata per calcolare l'indice di rifrazione di un oggetto interposto tra il beam-splitter e uno dei due specchi.

### L'esperimento di Michelson e Morley:

Come già detto precedentemente, un interferometro di questo tipo venne utilizzato dai due fisici Michelson e Morley, in un famoso esperimento nel 1887 per determinare la velocità del vento d'etere rispetto alla Terra. Lo strumento usato era leggermente diverso da quello appena descritto in quanto disponeva di altri specchi posti nei bracci: in questo modo la luce poteva essere riflessa più volte prima di essere ricombinata nel beam-splitter. Ciò consentiva alle onde di percorrere una distanza di 11 metri, molto più grande di quella reale dei bracci. Inoltre tutto l'apparato era montato su una pietra posta sopra ad una "piscina" di mercurio liquido per isolarlo dalle vibrazioni generate dal terreno e per poterlo ruotare senza scosse. La sensibilità dello strumento era tale da poter evidenziare uno spostamento di 1/1000 di frangia in seguito ad una perturbazione del sistema.

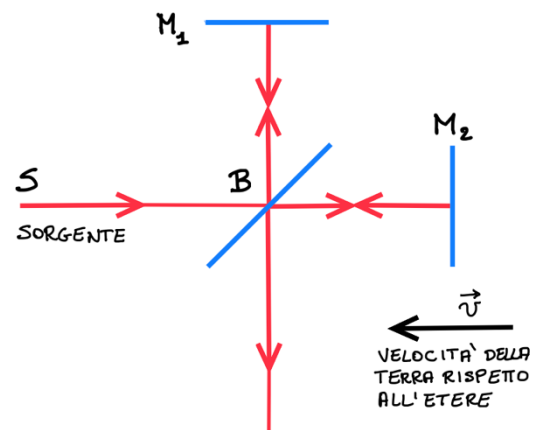
L'idea di fondo dell'esperimento era misurare il cambiamento nel numero delle frange nella figura di interferenza a seguito della rotazione dell'interferometro di  $90^\circ$ .

Supponiamo infatti di avere la situazione rappresentata in figura: in accordo con la meccanica classica, nel braccio  $BM_2$  la velocità della luce rispetto alla Terra risulta essere pari a:

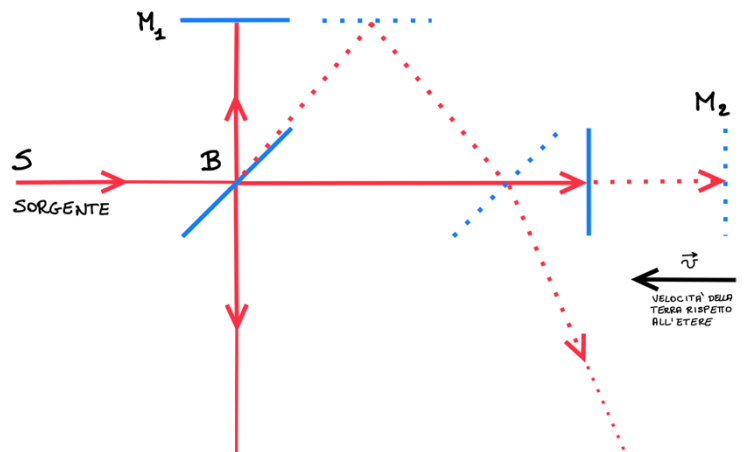
$$\vec{c} - \vec{v}$$

essendo  $\vec{v}$  la velocità della Terra rispetto all'etere. Perciò il raggio di luce, nel viaggio di andata, impiega un tempo pari a  $L/(c - v)$  mentre al ritorno un tempo  $L/(c + v)$ . Il tempo totale di andata è:

$$t_2 = \frac{L}{(c - v)} + \frac{L}{(c + v)} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



Per quanto riguarda invece il braccio  $BM_1$  la situazione è leggermente diversa come si può vedere nella seguente immagine. Infatti in questo caso, occorre considerare che mentre il raggio di luce si propaga, l'interferometro si muove rispetto all'etere. Di conseguenza lo specchio si muoverà e la traiettoria percorsa dal raggio, come vista nel sistema di riferimento esterno, sarà come quella tratteggiata in figura (un triangolo). Perciò per il secondo raggio che si muove in direzione perpendicolare al precedente, la sua velocità è definita dal teorema di Pitagora  $\sqrt{c^2 - v^2}$  in quanto lo specchio si muove a velocità  $v$  (cateto) mentre la luce a velocità  $c$  (ipotenusa). Perciò il tempo di andata (ed anche di ritorno in questo caso) è pari a  $L/\sqrt{c^2 - v^2}$  mentre il tempo totale è:



$$t_1 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Di conseguenza la differenza di tempi:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{2L}{c} \cdot \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} - \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right) = \frac{L}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

La differenza di cammino ottico è allora:



$$\Delta L = c\Delta t = L \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

E quindi la differenza di fase:

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

Se ora l'interferometro viene ruotato di  $90^\circ$ , si invertono le situazioni e quindi sostanzialmente il ruolo di  $M_1$  viene occupato da  $M_2$  e viceversa. Allora:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \approx -\frac{L}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

La differenza di fase:

$$\frac{\Delta\varphi'}{2\pi} = \frac{\Delta L'}{\lambda} = -\frac{L}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

La differenza tra queste due differenze di fase indica di quanto si sarebbero dovute spostare le frange rispetto alla distanza tra due massimi successivi:

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta\varphi - \Delta\varphi'}{2\pi} = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

Con i dati dell'esperimento di Michelson-Morley lo shift atteso sarebbe dovuto essere pari a:

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{22 \text{ m}}{5.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \cdot 10^{-8} \approx 0.4$$

In realtà non venne osservato alcuno spostamento, benché la sensibilità dello strumento, come già detto, fosse in grado di osservare uno spostamento di 0.01 frange.

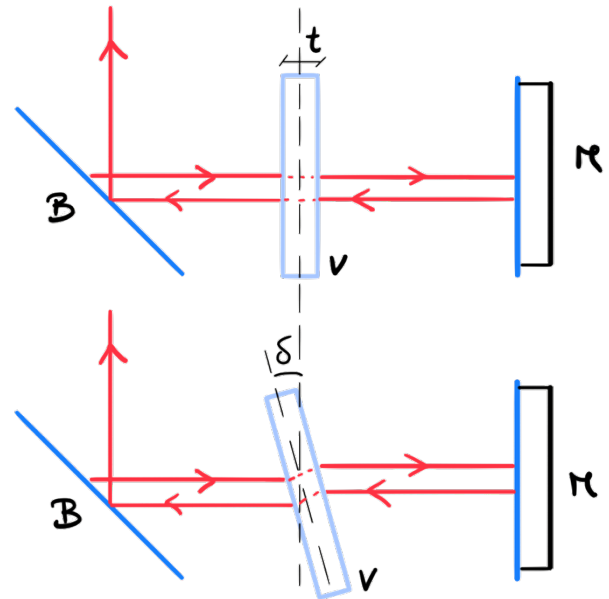
L'esperimento fu ripetuto diverse volte, in diverse ore della giornata, di notte e in altri periodi dell'anno per escludere l'ipotesi che la Terra si fosse venuta a trovare casualmente in un momento nel quale la sua velocità rispetto all'etere fosse nulla a causa del suo moto all'interno del Sistema Solare. L'esperimento fu poi ripetuto durante tutto il 900 da altri scienziati ma nessuno evidenziò mai uno spostamento di frange, concludendo così che l'etere non esisteva e che la luce poteva propagarsi anche nel vuoto.

### Misura dell'indice di rifrazione di un materiale:

L'interferometro è uno strumento molto sensibile: è in grado di apprezzare variazioni di cammino ottico fino all'ordine del nanometro. Ogni volta che il cammino viene modificato appaiono le frange di interferenza si spostano: le frange già esistenti si spostano in favore di nuove che andranno a occupare quelle stesse posizioni o altre a seconda dell'entità dello spostamento.

Per visualizzare questo fenomeno, possiamo pensare di interporre tra il beam-splitter (B) e uno dei due specchi (M) un oggetto di forma regolare (come ad esempio di un parallelepipedo di vetro). Supponiamo di interporre un vetrino di spessore  $t$ .

Quando il vetrino è posto perpendicolarmente alla direzione di propagazione del fascio, il percorso del laser viene aumentato di due volte lo spessore del vetrino.



Quando invece il vetrino viene ruotato ad esempio di un angolo  $\delta$  il cammino ottico subisce una variazione a causa della legge di Snell che porta il raggio di luce ad essere rifratto all'interno del vetrino. Il percorso del laser cambia rispetto alla precedente situazione: come conferma del progressivo cambio di cammino

ottico via via che si ruota il vetrino, avremo che le frange di interferenza cominceranno a muoversi sullo schermo.

In particolar modo possiamo calcolare esplicitamente la differenza di cammino ottico  $\Delta$  definita come la lunghezza del cammino percorso moltiplicata per l'indice di rifrazione del materiale attraverso il quale si propaga il laser tra la configurazione in cui il vetrino è ruotato rispetto alla direzione di propagazione della luce (linea tratteggiata) e quella in cui ne è perpendicolare (linea continua):

$$\Delta = 2 \cdot (\overline{AC} \cdot n + \overline{CE} - \overline{AB} - \overline{BD} \cdot n)$$

Il fattore 2 indica il fatto che il laser compie due volte il percorso (prima e dopo aver riflettuto sullo specchio).

Possiamo vedere che:

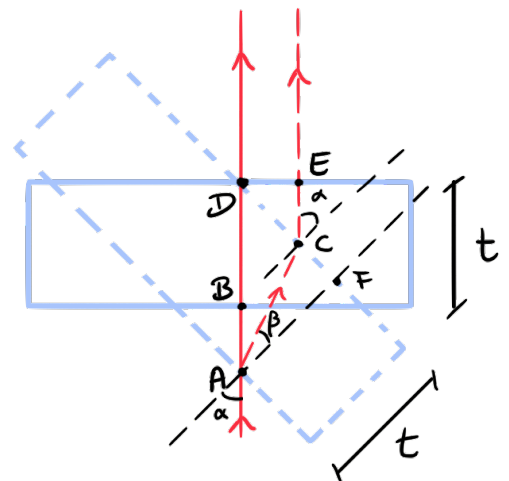
$$\overline{BD} = t$$

$$\overline{AC} = t / \cos \beta$$

Inoltre:

$$\overline{CE} = \overline{DC} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\overline{DF} - \overline{CF}) \sin \alpha = (t \tan \alpha - t \tan \beta) \sin \alpha = t(\tan \alpha - \tan \beta) \sin \alpha$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{DB} = \frac{t}{\cos \alpha} - t$$



Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\cos \beta} n + t(\tan \alpha - \tan \beta) \sin \alpha - \frac{t}{\cos \alpha} + t - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\cos \beta} n + t \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - t \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} - \frac{t}{\cos \alpha} + t - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\cos \beta} n + t \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - t \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} - \frac{t}{\cos \alpha} + t - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\cos \beta} n - t \cos \alpha - t \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} + t - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\cos \beta} (n - \sin \beta \sin \alpha) + t(1 - \cos \alpha) - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} (n - \sin \beta \sin \alpha) + t(1 - \cos \alpha) - tn\end{aligned}$$

Ricordando che per la legge di Snell  $\sin \alpha = n \sin \beta$  (è stato considerato pari a 1 l'indice di rifrazione dell'aria):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \left( n - \frac{1}{n} \sin^2 \alpha \right) + t(1 - \cos \alpha) - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= \frac{t}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} (n^2 - \sin^2 \alpha) + t(1 - \cos \alpha) - tn \\ \frac{\Delta}{2} &= t\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + t(1 - \cos \alpha) - tn\end{aligned}$$

Isolando la radice, quadrando e risolvendo per  $n$  si ha che:

$$n = \frac{2(t - \Delta)(1 - \cos \alpha) + \Delta^2/t}{2t(1 - \cos \alpha) - 2\Delta}$$

Poiché la differenza di cammino ottico è  $\Delta = N\lambda/2$  (è stato considerato pari a 1 l'indice di rifrazione dell'aria), allora:

$$n = \frac{(2t - N\lambda)(1 - \cos \alpha) + N^2\lambda^2/4t}{2t(1 - \cos \alpha) - N\lambda}$$

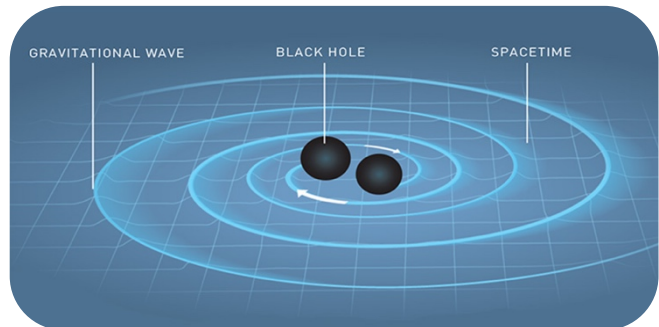
Il termine  $N^2\lambda^2/4t$  può anche essere trascurato in quanto molto più piccolo dell'altro termine a numeratore:

$$n = \frac{(2t - N\lambda)(1 - \cos \alpha)}{2t(1 - \cos \alpha) - N\lambda}$$

## Onde gravitazionali e moderni interferometri:

La configurazione di Michelson dell'interferometro viene ancora utilizzata per alcuni esperimenti nell'ambito astrofisico della rilevazione delle onde gravitazionali.

Le **onde gravitazionali** sono delle increspature dello spaziotempo che si propagano alla velocità della luce sotto forma di onda. Vengono generate da oggetti estremamente compatti cioè da oggetti che racchiudono tanta massa



all'interno di una piccola dimensione spaziale: per un oggetto sferico, la compattezza è il rapporto tra la massa  $M$  e il suo raggio  $R$ . L'emissione può essere dovuta o ad un'intensa rotazione di un corpo compatto in modo asimmetrico oppure all'esplosioni di supernovae o ancora alla fusione (detta *coalescenza*) di due oggetti compatti.

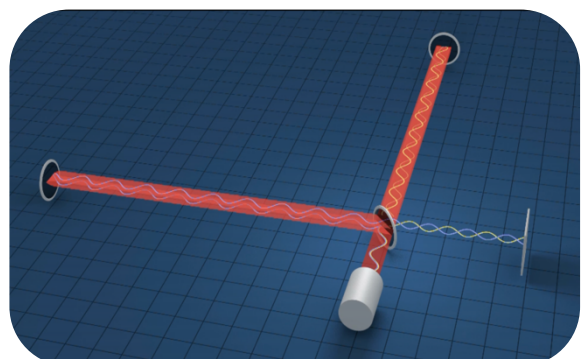
In questo caso la produzione di onde gravitazionali fa diminuire l'energia totale del sistema: di conseguenza i due corpi si avvicinano e questo incrementa la produzione di onde gravitazionali, il che accelera la perdita di energia del sistema e quindi l'avvicinamento dei due oggetti fino alla loro completa fusione. A questo punto si interrompe l'emissione delle onde gravitazionali.

Qualunque sia la loro origine, l'effetto che l'onda provoca è quello di alterare le distanze relative tra due punti dello spaziotempo: di conseguenza questi cominceranno ad allontanarsi e ad avvicinarsi con un movimento periodico, in fase con l'onda.

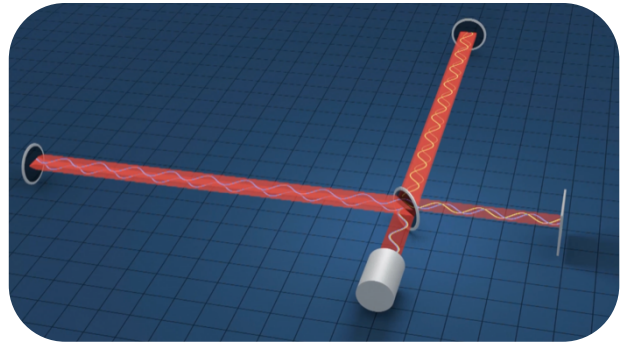
Tuttavia questo fenomeno non è rilevabile ad occhio nudo in quanto l'entità della deformazione apportata è dell'ordine di  $10^{-21}$ , mille volte più piccola delle dimensioni del protone.

Questo implica che per poter essere rilevata occorre uno strumento molto sensibile, capace di poter apprezzare questa variazione: l'idea è di sfruttare le proprietà dell'interferometro in modo molto semplice.

Supponiamo di avere un interferometro costruito in modo tale da non osservare alcuna figura di interferenza in condizioni normali ovvero i bracci sono sfasati di mezza lunghezza d'onda. Al passaggio di un'onda gravitazionale, essi subiscono una deformazione (vengono accorciati



o allungati): di conseguenza la distanza che il laser percorre nei due bracci sarà differente e quindi anche il tempo impiegato. Le due onde non rimarranno più sfasate come nella configurazione normale ma invece avranno una fase relativa differente generando una figura di interferenza.



Quindi riassumendo se non passa l'onda gravitazionale (condizione di quiete) la particolare configurazione dell'interferometro è tale per cui sullo schermo non si vede una figura di interferenza mentre quando passa un'onda gravitazionale si osserva una figura di interferenza. Il primo segnale di onda gravitazionale, prodotto dalla coalescenza di due buchi neri e giunto a Terra il 14 settembre 2015, è stato registrato da 3 interferometri che funzionano su questo principio: LIGO (2 laboratori negli USA) e VIRGO (a Cascina, vicino Firenze).

Considerando che lo strumento è molto sensibile e che la variazione della lunghezza dei bracci è veramente piccola, occorrono particolari accorgimenti in questi laboratori: la distanza tra lo specchio e il beam-splitter è di qualche chilometro (3 km per VIRGO e 4 km per LIGO) ma tra di essi vengono messi altri due specchi in modo tale che la luce (come per l'esperimento di Michelson-Morley) possa effettuare molte riflessioni prima di andarsi a ricombinare, allungando la distanza percorsa dal laser a qualche centinaio di chilometri per braccio (100 km per VIRGO e 1200 km per LIGO).

Gli specchi hanno un peso intorno ai 40 kg per un diametro di 35 cm mentre il beam-splitter ha un diametro di 55 cm per un peso intorno ai 30 kg.

La superficie degli specchi ha una bassissima rugosità (dell'ordine di  $\lambda/1000$ ) in modo tale da impedire che qualche imperfezione faccia deviare il raggio di luce al momento della riflessione. L'elevata massa di questi oggetti consente inoltre di mantenere la stabilità degli stessi evitando effetti di oscillazione ogniqualvolta la luce urta lo specchio. Inoltre i componenti dell'interferometro sono appesi mediante opportuni accorgimenti all'interno di torri alte 8 m che costituiscono dei super attenuatori in grado di bilanciare le oscillazioni indotte dalle vibrazioni del terreno provocate tanto da movimenti tellurici (le vibrazioni sismiche del terreno sono miliardi di volte più grandi delle variazioni di distanza indotte dalle onde gravitazionali) quanto dalle persone che cammino etc. In questo modo si impedisce che la distanza tra lo specchio ed il beam-splitter cambi a causa di questi fenomeni producendo così uno sfasamento tra le due onde, generando una figura di interferenza.

Inoltre i componenti sono raffreddati a temperature molto basse (20 K) in modo tale da evitare sia gli effetti di dilatazione termica degli specchi che potrebbero indurre alterazioni del percorso del laser (la luce arriva prima perché la distanza che percorre è minore essendosi allungato lo specchio per effetti dovuti al calore) sia eventuali oscillazioni dello specchio provocate dalle vibrazioni energetiche delle molecole e degli atomi che lo costituiscono.

Infine tutti questi elementi sono inseriti all'interno di tubi nei quali è fatto un vuoto molto spinto in modo tale da azzerare l'aria presente all'interno (ci vogliono molti giorni per togliere tutta l'aria): in questo modo si impedisce il fenomeno di *scattering* della luce sulle particelle contenute nell'aria ovvero l'urto dei fotoni con gli atomi e le molecole dei costituenti dell'aria. Se accadesse ciò il laser devierebbe la sua traiettoria da rettilinea che era, allungando così la distanza percorsa fino allo specchio, generando una figura di interferenza non prevista.