

Nome Cognome	Data



Esperienza: interferometro

Materiali a disposizione:

- interferometro;
- calibro;
- righello;
- goniometro;
- vetrino;
- un braccio per il vetrino;
- telefono;
- Newport RSX-2 Rotation Stage (base rotante);
- supporto per il telefono (cavalletto).

Scopo dell'esperienza: utilizzare un interferometro di Michelson-Morley per determinare l'indice di rifrazione di un sottile parallelepipedo di vetro.

1ª parte: teoria e set-up (tenere spento l'interferometro)

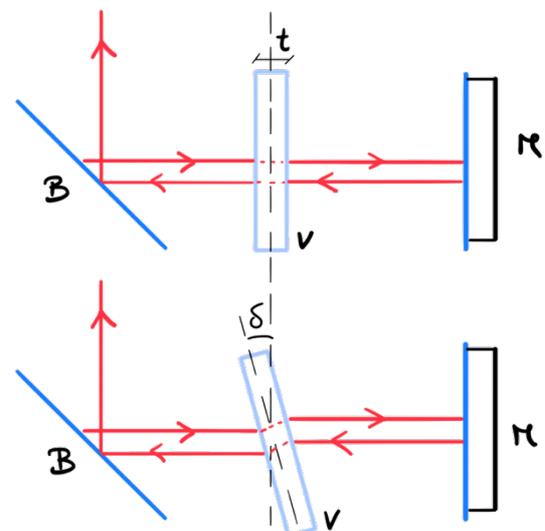
Un esperimento che può essere condotto utilizzando l'interferometro è misurare l'indice di rifrazione di un oggetto di forma regolare (come ad esempio di un parallelepipedo di vetro) grazie al principio di funzionamento dello strumento stesso.

Consideriamo infatti il caso in cui tra il beam-splitter (B) e uno dei due specchi (M) viene interposto un vetrino di spessore t .

Quando il vetrino è posto perpendicolarmente alla direzione di propagazione del fascio, il percorso del laser viene aumentato di due volte lo spessore del vetrino.

Quando invece il vetrino viene ruotato ad esempio di un angolo δ il cammino ottico subisce una variazione a causa della legge di Snell che porta il raggio di luce ad essere due volte rifratto all'interno del vetrino.

Il percorso del laser cambia rispetto alla precedente situazione: come conferma del progressivo cambio di



cammino ottico via via che si ruota il vetrino, avremo che le frange di interferenza cominceranno a muoversi sullo schermo.

Se α è l'angolo del quale si è ruotato il vetrino rispetto alla direzione perpendicolare al braccio dell'interferometro BM e in corrispondenza si sono contate N frange muoversi rispetto ad un punto, l'indice di rifrazione del vetrino è dato da:

$$n = \frac{(2t - N\lambda)(1 - \cos \alpha)}{2t(1 - \cos \alpha) - N\lambda}$$

Posizioniamo allora tra uno dei due specchi e il beam-splitter un vetrino di spessore $t \pm \Delta t$ (usate il calibro per avere una misura più precisa dello spessore).

$$t = (\quad \pm \quad) m$$

L'obiettivo sarà quello di poter ruotare l'angolazione del vetrino relativamente al braccio dell'interferometro: data l'elevata sensibilità dello strumento, è sconsigliabile poggiare il vetrino direttamente sul basamento dell'interferometro.

Per questo è meglio ideare un braccio al quale attaccare il vetrino e che permette di ruotarlo come mostrato in figura: il parallelepipedo di marmo

è il braccio che permette di ruotare il vetrino.

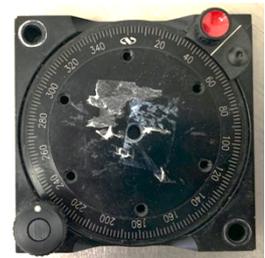
Inoltre occorre avere l'accortezza di far in modo

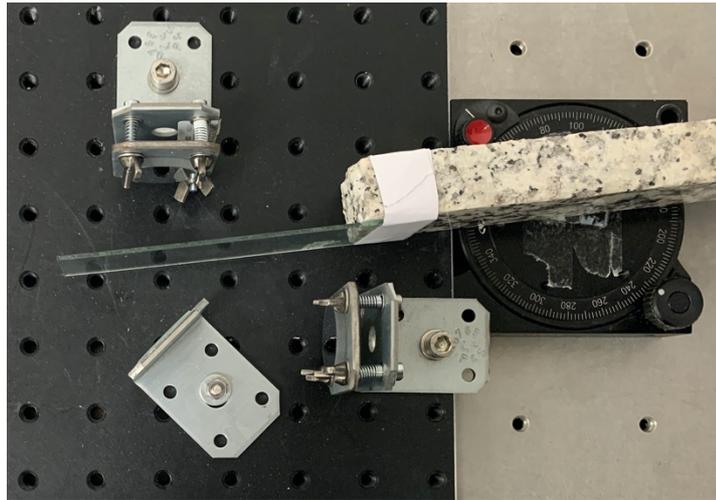
che il vetrino insieme con il braccio non poggino sulla base dell'interferometro in modo tale da non generare delle vibrazioni nello strumento quando si andrà a far ruotare il braccio. Per far ciò è sufficiente che il braccio esterno sia posizionato sopra a una base rialzata rispetto al livello della stessa dell'interferometro.

Allo stesso tempo bisogna posizionare il vetrino in modo tale che sia interposto tra lo specchio e il beam-splitter cosicché, una volta acceso l'interferometro, il raggio lo attraversi.

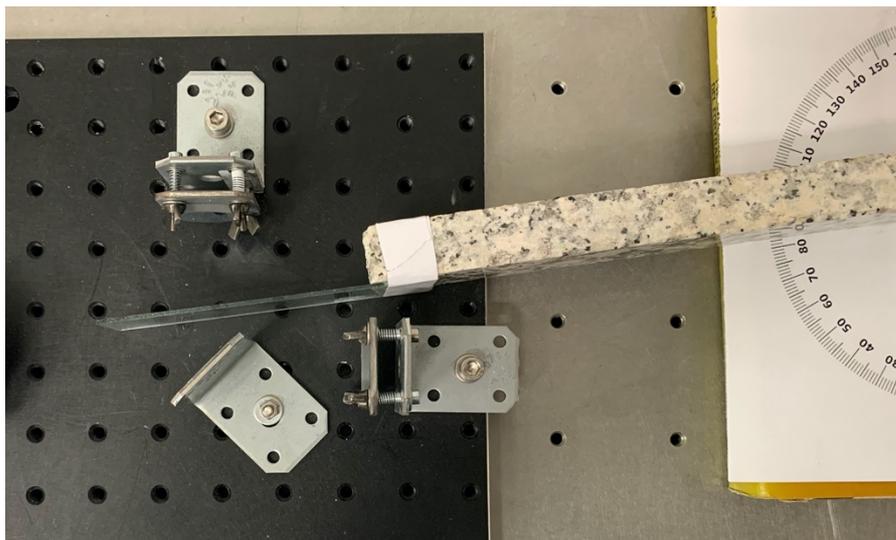
Occorre ora configurare l'apparato in modo tale da permettergli di leggere l'angolo di rotazione del vetrino. Possiamo adottare tre strategie:

1. La strategia migliore consiste nell'utilizzare una piccola piattaforma ruotante (come ad esempio la Newport RSX-2 Rotation Stage) come quella mostrata in figura. Questo strumento è dotato di una piccola manopola che ruota la piastra circolare graduata che è posta al centro. Al di sopra si posiziona il braccio esterno e il tutto viene affiancato alla base dell'interferometro. La rotazione della manopola consente di ruotare rigidamente il braccio esterno e con esso anche il vetrino come mostrato in figura. In questo caso l'incertezza da attribuire alla misura dell'angolo viene fornita dalla sensibilità della piattaforma.





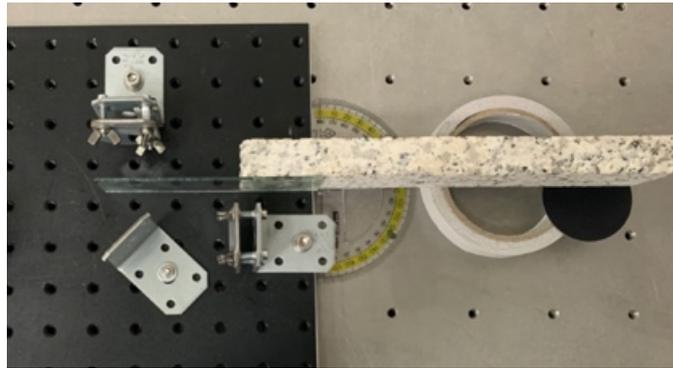
2. La seconda strategia consiste nello stampare l'immagine di un goniometro e posizionarlo al di sotto del braccio esterno o utilizzare direttamente un goniometro, prestando attenzione al fatto che l'estremità libera di quest'ultimo si trovi al centro dello strumento. In questo modo potremo ruotare il braccio esterno intorno a questo punto e riusciremo a leggere direttamente il valore dell'angolo.



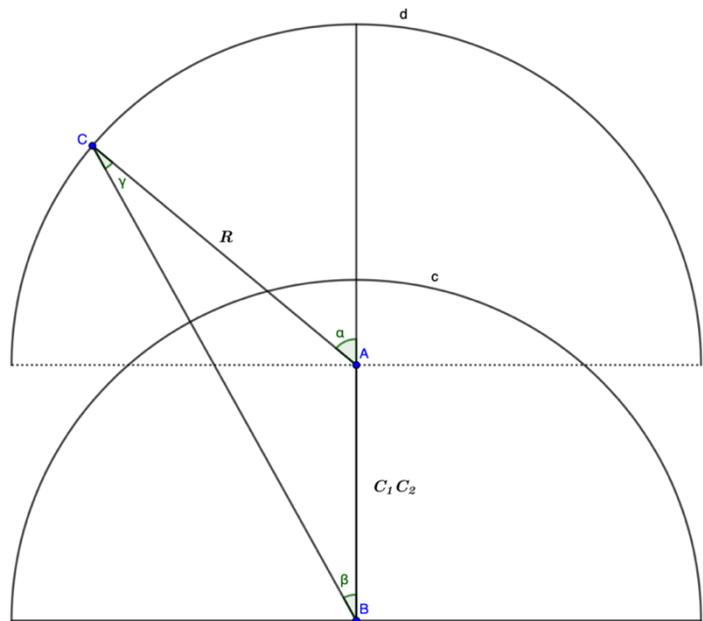
Questo approccio ha lo svantaggio che occorre prestare attenzione alla rotazione che avvenga mantenendo l'estremità libera del braccio esterno sempre al centro del goniometro. Inoltre bisogna stare attenti che il braccio esterno non ruoti intorno al proprio asse longitudinale.

3. L'ultimo metodo è il più scomodo e può introdurre sorgenti aggiuntive d'errore ma è funzionale nel caso in cui non si avesse possibilità di adottare la precedente strategia: valgono le stesse accortezze del punto 2).

Facciamo nuovamente riferimento all'immagine seguente: si posiziona un goniometro attaccato alla base dell'interferometro al di sotto del braccio rotante, prestando attenzione ad allineare il centro di rotazione del braccio esterno con il centro del goniometro e posizionarlo perpendicolarmente al braccio esterno.



Occorre però a questo punto fare una correzione all'angolo misurato: infatti l'angolo misurato non corrisponde al vero angolo di rotazione del vetrino in quanto il centro del goniometro non è posizionato esattamente in corrispondenza del perno intorno al quale il braccio ruota. Seguendo l'immagine sottostante, dobbiamo ragionare in questo modo: d è la semicirconfenza che rappresenta il goniometro lì dove lo abbiamo posizionato, attaccato al lato della base dell'interferometro. La semicirconfenza c è invece il goniometro lì dove dovrebbe stare, ovvero centrato sul perno di rotazione del braccio che sostiene il vetrino. $\overline{AB} = C_1C_2$ è la distanza tra il centro di rotazione del braccio e il centro del goniometro, che ripetiamo devono essere allineati mentre R è il raggio del goniometro.



Infine possiamo definire due angoli: il primo è l'angolo α che corrisponde all'angolo che leggiamo dal goniometro. β è invece l'angolo vero di rotazione del braccio (e conseguentemente del vetrino) che non riusciamo a misurare a causa dell'impossibilità di posizionare un goniometro sul centro di rotazione del braccio.

Lo scopo è trovare l'angolo β che è quello che ci serve per poter identificare l'angolo di rotazione del vetrino.

Utilizzando il teorema dei seni per il triangolo ABC si ricava che:

$$\frac{\sin \gamma}{C_1C_2} = \frac{\sin \beta}{R}$$

Ora l'angolo al vertice di A è pari a $\pi - \alpha$ da cui allora $\gamma = \pi - (\pi - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$. Quindi:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{C_1C_2} = \frac{\sin \beta}{R}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{C_1 C_2} = \frac{\sin \beta}{R}$$

Da cui:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\frac{C_1 C_2}{R} + \cos \alpha}$$

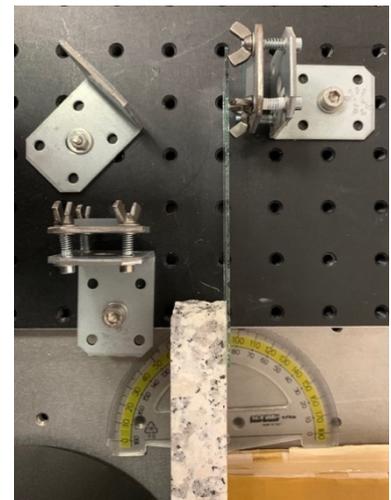
E quindi l'angolo vero di rotazione del vetrino risulta:

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{\sin \alpha}{\frac{C_1 C_2}{R} + \cos \alpha} \right)$$

Quindi una volta misurato il raggio del goniometro R , la distanza tra il centro di rotazione del braccio esterno e il centro del goniometro $C_1 C_2$, per ogni valore dell'angolo α letto sul goniometro, avremo il valore vero dell'angolo di rotazione β del vetrino.

Ricapitolando, il set-up dell'esperimento consiste in (tenere sempre l'interferometro speinto durante l'allestimento):

- posizionare l'interferometro su di un tavolo (possibilmente ben fissato a terra) a una distanza dal muro tale da poter osservare e distinguere bene le frange luminose da quelle scure;
- creare un braccio di supporto per il vetrino;
- capire quale strategia adottare per misurare l'angolo di rotazione del vetrino;
- posizionare il braccio del vetrino su di una base (ad esempio un libro) in modo tale che il vetrino sia libero di ruotare sopra l'interferometro senza sfregare sopra la base;
- allineare il vetrino in modo tale da risultare perpendicolare alla direzione specchio beam-splitter
- posizionare (se necessario) un goniometro o sotto il perno di rotazione del braccio esterno (facendolo coincidere con il centro del goniometro) o in un altro punto ma prestando in questo caso attenzione ad allineare il centro del goniometro con il centro di rotazione del braccio esterno seguendo la linea del braccio;
- misurare (se necessario) la distanza tra il centro di rotazione del braccio e il centro del goniometro;
- misurare (se necessario) il raggio del goniometro.



Una volta allestito il set-up misurare le due distanze $C_1 C_2$ e R :

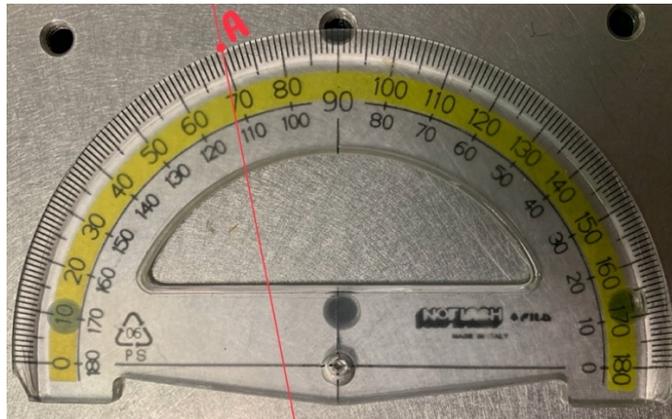
$$C_1 C_2 = (\quad \pm \quad) m$$

$$R = (\quad \pm \quad) m$$

2ª parte: misure

Possiamo ora passare alla parte pratica dell'esperimento: esso consisterà nel ruotare il braccio esterno di angoli successivi (prima di 1° , poi di 2° , poi di 3° e così via), fermandosi quando non è più possibile effettuare la rotazione e contando di volta in volta il numero di frange che in un determinato punto attraversano lo schermo.

Ci si accorgerà che non sarà possibile allineare esattamente il braccio esterno con la tacca del goniometro (nel caso in cui non stia centrato nel perno di rotazione) poiché appunto per questioni geometriche lo stesso non giace nella direzione radiale. Quello che avverrà è che invece di avere una lettura classica come quella mostrata in figura a lato (la linea rossa rappresenta il braccio di sostegno del vetrino) avremo una situazione diversa come mostrato nella figura sottostante.



Il sostegno al vetrino (linea rossa) dovrà intersecare il goniometro nel punto A ovvero la parte superiore della tacca di riferimento del goniometro.

Prestate attenzione agli errori di parallasse: è bene che a prendere le misure sia sempre la stessa persona la quale non dovrebbe muoversi durante la presa dati bensì dovrebbe rimanere sempre con lo sguardo perpendicolare al goniometro o all'indicatore di rotazione della base rotante in modo tale da evitare di volta in volta una diversa lettura dallo strumento.

Quando ruoteremo il vetrino ci accorgeremo tutti di non saper più contare data la grande velocità con la quale le frange scorrono sullo schermo: di conseguenza è conveniente posizionare su di un supporto (un cavalletto) un cellulare che possa riprendere lo schermo sul quale appariranno le frange. È bene infatti che il telefono sia fermo e che non sia una persona a fare il video perché altrimenti verrà mosso e sarà difficile contare le frange.

Ogni volta che verrà presa una misura faremo un video alle frange che corrono sullo schermo in modo tale da aver tempo di contarle in un secondo momento.

Predisposto quindi il cavalletto con il cellulare, spenta la luce ambientale, si accende l'interferometro: quando le frange si sono stabilizzate, regolare lo zoom e la luminosità del video dello smartphone in modo tale che risultino ben evidenti le frange.

Occorre fare molta attenzione durante la presa dati alle due riflessioni del vetrino: infatti il laser attraversa due volte il vetrino (dal beam-splitter verso lo specchio e viceversa) e per ogni transito non ci sarà solo il raggio rifratto (internamente ad esso) ma anche il raggio riflesso. Questi due raggi saranno direzionati verso l'esterno dell'interferometro in una certa direzione. È bene allora prima di iniziare la presa dati capire dove siano diretti facendo fare tutta la rotazione permessa al braccio esterno ed individuare i due raggi riflessi per evitare di trovarsi a guardare in quelle direzioni.

Occorre prestare particolare attenzione al laser in generale. Un'esposizione oculare momentanea non è considerata come pericolosa, tuttavia non deve essere guardato direttamente il raggio laser e va prestata molta attenzione altresì all'eventuale luce riflessa dalle componenti metalliche dello strumento che non è controllabile.

Prima di avviare la presa dati occorre fare un'ulteriore misura sulle frange dell'interferometro: posizioniamo un foglio di carta bianco sulla zona illuminata dalle frange e con molta accortezza a non guardare il laser, delimitiamo i bordi della frangia luminosa e i bordi della frangia scura.

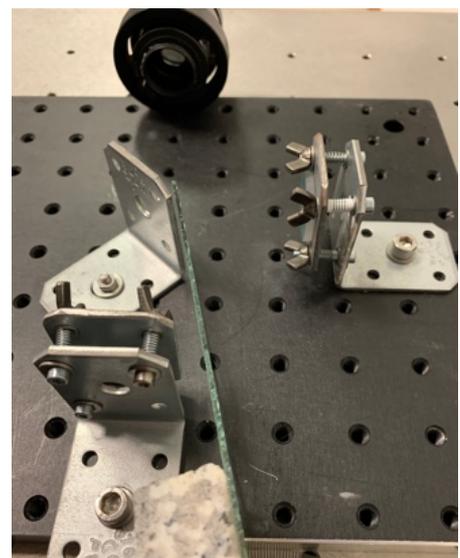
Una volta spento il laser, prendiamo il foglio e misuriamo la larghezza L_C della frangia chiara (luminosa) e L_S della frangia scura:

$$L_C = (\quad \pm \quad) \text{ cm}$$

$$L_S = (\quad \pm \quad) \text{ cm}$$

A questo punto avviare il video e ruotare di 1° il braccio esterno con il vetrino, quindi fermare il video e riportare il braccio esterno alla configurazione iniziale (0°). Ripetiamo le misure tante volte incrementando sempre di 1° fino a quando possiamo ruotare il braccio senza che vada a urtare con il beam-splitter e registrando con il cellulare ogni volta lo scorrere delle frange.

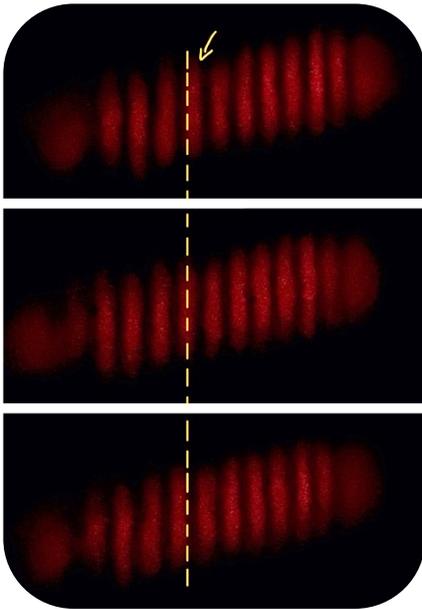
Una volta presi tutti i video per ciascun angolo di rotazione possiamo passare all'analisi dei dati.



3ª parte: analisi dati – contare le frange

La prima parte dell'analisi consiste nel guardare ogni video e contare di volta in volta quante frange passano in un dato punto.

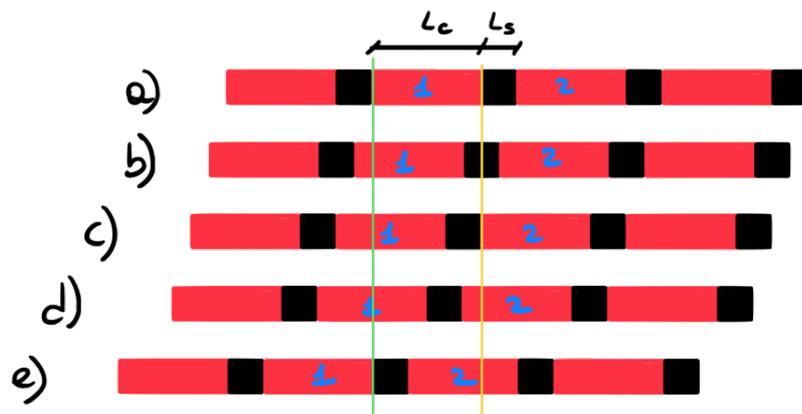
L'interferometro di Michelson-Morley deve riprodurre delle frange circolari concentriche: potrebbero risultare delle frange verticali. Potrebbe essere l'esito di un non corretto allineamento degli specchi: quando infatti questi non sono l'un l'altro paralleli, le frange non appariranno più circolari ma come bande verticali, orizzontali o diversamente inclinate. Tutto ciò non costituisce un problema al conteggio delle frange.



Bisogna quindi scegliere un punto di riferimento nel video, in corrispondenza di una frangia di interferenza costruttiva o distruttiva, e contare rispettivamente quanti massimi o quanti minimi lo attraversano.

Ad esempio nella figura a lato, rispetto al massimo indicato dalla freccia gialla si vede negli scatti successivi la frangia si sposta di uno da sinistra verso destra: diremo che il conteggio N delle frange è $+1$ quando sarà transitata tutta la frangia luminosa.

Per quanto riguarda invece gli spostamenti non interi? Al numero intero di frange che attraversano la linea di riferimento va sommata una parte frazionaria che nel caso di frange scure e chiare non della stessa dimensione occorre precisare come si determina.



Consideriamo l'immagine a lato costituita da una serie di alternanza di frange scure e frange chiare di diversa larghezza. Supponiamo che la linea verde sia il nostro riferimento per contare le frange (la gialla è utile ugualmente per visualizzare gli spostamenti).

Allora nel caso b) è avvenuto uno spostamento di mezza frangia scura $L_S/2$, nel caso c) di una frangia scura totale L_S , nel caso d) di una frangia scura e di mezza frangia chiara $L_S + L_C/2$ mentre nel caso e) di tutta una frangia scura e di tutta una frangia chiara $L_S + L_C$.

Si ragiona quindi in termine di spostamento frazionale ovvero dello spostamento della frangia chiara dalla linea di riferimento (verde) rispetto a quello che corrisponde allo spostamento totale $L_S + L_C$.

Scriveremo allora che le frange N_f che hanno attraversato la linea di riferimento sono:

b) $N_f = (L_S/2)/(L_S + L_C)$

c) $N_f = L_S/(L_S + L_C)$

d) $N_f = (L_S + L_C/2)/(L_S + L_C)$

e) $N_f = (L_S + L_C)/(L_S + L_C) = 1$

Introducendo quindi il parametro $r = L_C/L_S$ che ci rapporta la dimensione della frangia chiara a quella scura:

caso b	caso c	caso d	caso e
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+r}$	$\frac{1}{1+r}$	$\frac{1+r/2}{1+r}$	1

Vediamo che nel caso in cui le frange sono di egual dimensione ($r = 1$) la tabella si riduce giustamente ad avere:

caso b ($r = 1$)	caso c ($r = 1$)	caso d ($r = 1$)	caso e ($r = 1$)
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

In questo modo possiamo definire l'incertezza corretta da associare alla misura del numero di frange che contiamo transitare rispetto al riferimento, assumendo che la parte intera del conteggio non sia affetta da errore. In modo analogo possiamo affermare che se transitano un numero intero di massimi (o minimi) la misura può considerarsi non affetta da errore.

Detta ΔL l'incertezza sulla misura di L_C e L_S (è la stessa perché vengono misurate con lo stesso strumento), si avrà che:

- Caso b, d:

$$\Delta N = \frac{\Delta L}{2(L_C + L_S)}$$

- Caso c:

$$\Delta N = \frac{\Delta L}{(L_C + L_S)}$$

NB: questa correzione è generalmente sulla seconda cifra decimale del risultato: è apprezzabile anche se non strettamente necessaria. Può essere omessa, considerare le frange come di ugual spessore e riferirsi alla seconda tabella per il calcolo della parte decimale del numero di frange. In tal caso l'incertezza sulla frangia può essere presa paria a $\Delta N = 0.25$.

4ª parte: analisi dati – calcolo dell'indice di rifrazione

Con quest'indicazione per iniziare l'analisi dei dati potete compilare una tabella su Excel: nella prima colonna (A) scrivete il valore dell'angolo in gradi di rotazione del vetrino. Nella colonna successiva

(B) riportate il valore dell'angolo in radianti e in quella ancora successiva (C) il numero di frange contate per ciascun video con infine nella cella (D) l'incertezza sulla misura.

A questo punto, se necessario, occorre calcolare la correzione sull'angolo utilizzando la formula:

$$\beta = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin \alpha}{\frac{C_1 C_2}{R} + \cos \alpha}\right)$$

dove α è l'angolo che avete misurato dal goniometro, $C_1 C_2$ la distanza tra il centro di rotazione del braccio e il centro del goniometro e R il raggio del goniometro.

Nella prossima colonna (E) calcolate quindi la correzione all'angolo ricordando di utilizzare come angolo α la misura in radianti (colonna B). Il risultato dell'angolo β verrà fornito da Excel in radianti. Se non è necessario, ricopiate il valore della colonna B.

A questo punto calcoliamo l'incertezza sul valore di β che porremo nella successiva colonna (F).

Si può stimare che l'errore è definito dalla seguente:

$$\Delta\beta = \frac{1}{\mu} \sqrt{R^2(C_1 C_2 \cos \alpha + R)^2 \Delta\alpha^2 + R^2 \sin^2 \alpha \Delta C_1 C_2^2 + C_1 C_2^2 \sin^2 \alpha \Delta R^2}$$

dove per abbreviare la formula si è definito:

$$\mu = C_1 C_2^2 + 2C_1 C_2 R \cos \alpha + R^2$$

Qui $\Delta\alpha$, $\Delta C_1 C_2$ e ΔR sono rispettivamente l'errore sulla misura dell'angolo α (in radianti), sul segmento $C_1 C_2$ e sul raggio del goniometro R . Anche in questo caso il risultato è fornito in radianti.

Fino ad ora la tabella è così fatta:

	A	B	C	D	E	F
1	Angolo α (in gradi)	Angolo α (in radianti)	Numero frange (N)	ΔN	Angolo β (in radianti)	$\Delta\beta$ (in radianti)

A questo punto siamo pronti per poter calcolare il valore dell'indice di rifrazione n per ciascuna misura (t e λ sono espressi in metri):

$$n = \frac{(2t - N\lambda)(1 - \cos \beta)}{2t(1 - \cos \beta) - N\lambda}$$

L'errore sul valore di n è definito da:

$$\Delta n = \frac{N\lambda}{\zeta} \cdot \sqrt{(\sin \beta \cdot (N\lambda - 2t))^2 \Delta\beta^2 + (2 \cos \beta \cdot \eta)^2 \Delta t^2 + (2t \cos \beta \cdot \eta)^2 \Delta N^2}$$

dove per abbreviare la formula si è posto:

$$\begin{cases} \zeta = (N\lambda + 2t \cos \beta - 2t)^2 \\ \eta = \cos \beta - 1 \end{cases}$$

qui $\Delta\beta$, Δt e ΔN sono rispettivamente l'errore sulla misura dell'angolo β (in radianti), sullo spessore t del vetrino e sul numero N delle frange contate.

Inserite nelle colonne G e H del vostro foglio di calcolo il valore di n e di Δn :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Angolo α (in gradi)	Angolo α (in radianti)	Numero frange (N)	ΔN	Angolo β (in radianti)	$\Delta\beta$ (in radianti)	n	Δn

A questo punto possiamo stimare il valor di n da questo insieme di dati: non possiamo però utilizzare la formula del valor medio in quanto dobbiamo tener conto che a ogni valore di n viene associato una diversa incertezza e che quindi ogni valore di n non contribuisce allo stesso modo sul valor medio. In questa condizione è possibile dimostrare che la miglior stima di n è fornita dalla media *pesata* definita come:

$$\bar{n} = \frac{\sum_i n_i w_i}{\sum_i w_i}$$

dove w_i sono i *pesi* pari a:

$$w_i = \frac{1}{(\Delta n_i)^2}$$

cioè i pesi sono pari all'inverso del quadrato dell'incertezza associata alla misura.

La migliore stima invece dell'incertezza da associare al valor medio pesato \bar{n} è:

$$\Delta \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}$$

Allora è conveniente calcolare nelle successive due colonne I e J rispettivamente per ciascuna misura i valori $1/\Delta n_i$ e il valore dei pesi $w_i = 1/(\Delta n_i)^2$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Angolo α (in gradi)	Angolo α (in radianti)	Numero frange (N)	ΔN	Angolo β (in radianti)	$\Delta\beta$ (in radianti)	n	Δn	$1/\Delta n$	$w=1/(\Delta n)^2$

A questo punto determinate il valor medio pesato $\bar{n} \pm \Delta \bar{n}$ delle vostre misure.

$$\bar{n} = (\quad \pm \quad)$$

