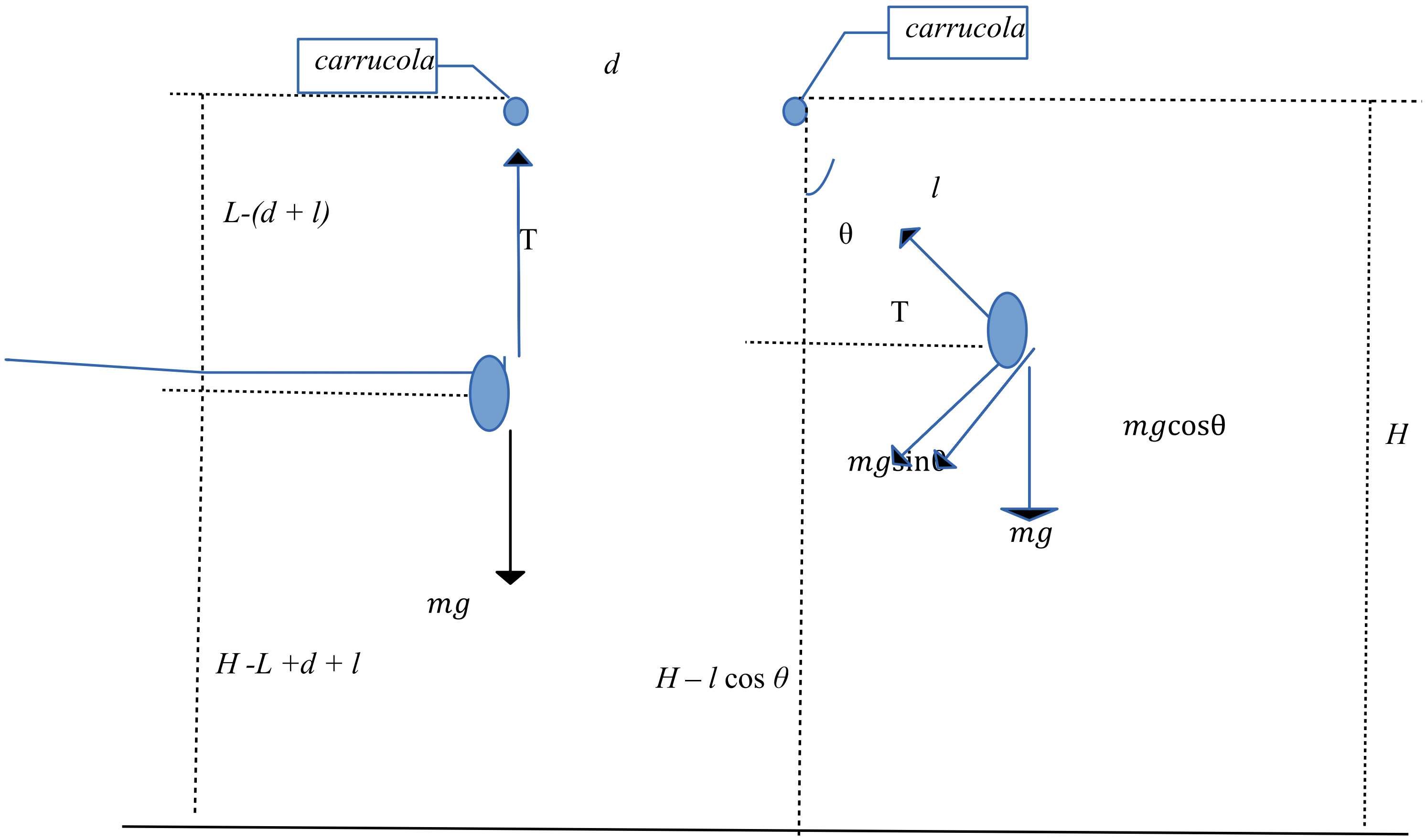
# UN PROBLEMA NON BANALE

Consideriamo due pendoli di eguale massa legati assieme da un filo inestensibile di lunghezza fissata L.
I pendoli sono sospesi mediante due carrucole poste ad una distanza d fra loro e montate su due supporti paralleli. Supponiamo trascurabile gli effetti dell'attrito.
Inizialmente i due pendoli sono in equilibrio.

Cosa accade se uno dei due pendoli è messo in oscillazione? Come si muove il sistema?
Seguendo lo schema seguente




*L = lunghezza del filo*

Eduardo Ciardiello Paola Diener

Possiamo scrivere l'equazione del moto.

## *Principio di minima azione.*

L'energia cinetica del sistema è:

$$K = \frac{1}{2}(l\dot{\theta})^2 + 2(\frac{1}{2}m\dot{l}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{l}^2$$

L'energia potenziale si scrive:

$$U = mg(H - L + d + l) + mg(H - l\cos\theta) = mgl - mgl\cos\theta + mg(H - L + d) + mgH$$

La Lagrangiana del sistema, a meno di termini costanti, è:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{l}^2 - mgl + mgl\cos\theta$$

L'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

diventa:

$$\begin{cases} 2ml\dot{l}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \\ 2m\ddot{l} = ml\dot{\theta}^2 - mg + mg\cos\theta \end{cases}$$

che semplificata si scrive:

$$\begin{cases} 2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \\ 2\ddot{l} = l\dot{\theta}^2 - g + g\cos\theta \end{cases}$$

## *Interpretazione fisica.*

Il moto si può dividere in moto di rotazione e traslazione.
Per la rotazione l'equazione è

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$\vec{M}$e $\vec{L}$ sono valutati rispetto alla carrucola di destra.
La velocità ha due componenti: una tangente al cerchio di raggio $l$: $l\dot{\theta}$, e una nella direzione del filo: $\dot{l}$, per cui $L = ml \cdot l\dot{\theta}$.
Il contributo al momento delle forze è solo quello della forza peso e vale $M = l \cdot mg\sin\theta$
Se il pendolo si muove dalla posizione di equilibrio verso destra il momento angolare ha verso opposto a quello delle forze esterne (il pendolo è frenato); se invece si muove verso il punto di equilibrio da destra allora la situazione si inverte: il momento angolare ha li stesso verso del momento

delle forze esterne (il pendolo è accelerato).
Quindi per la rotazione si ottiene:

$$2ml\dot{l}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

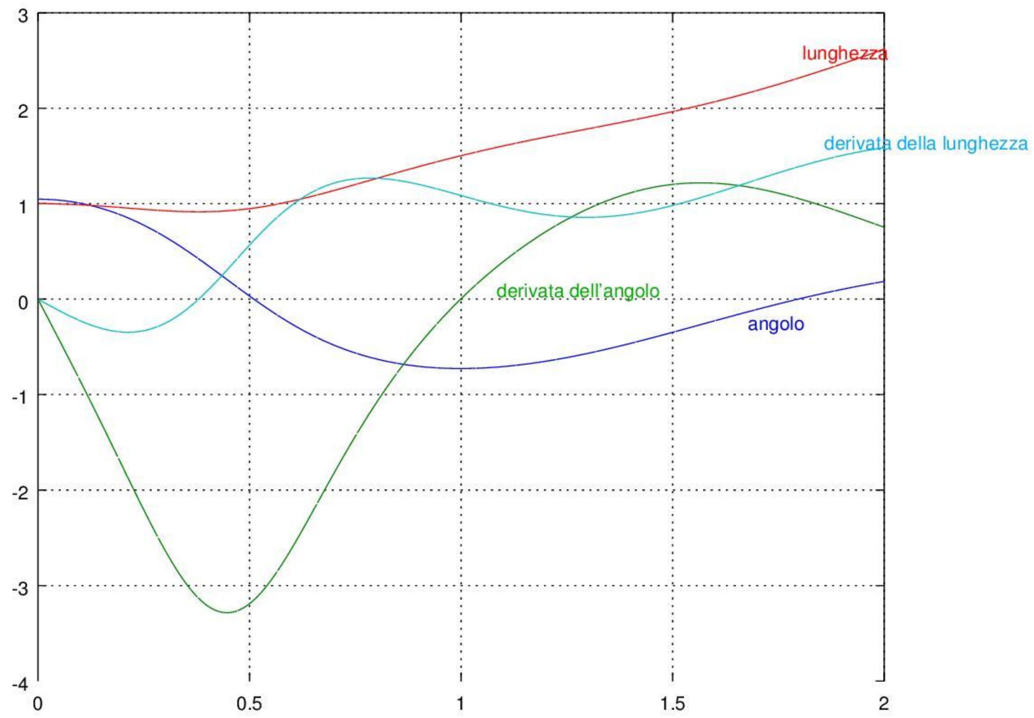
Per le traslazioni le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = m\left(\ddot{l} - \dfrac{(l\dot{\theta})^2}{l}\right) \\ T - mg = m\ddot{l} \end{cases}$$

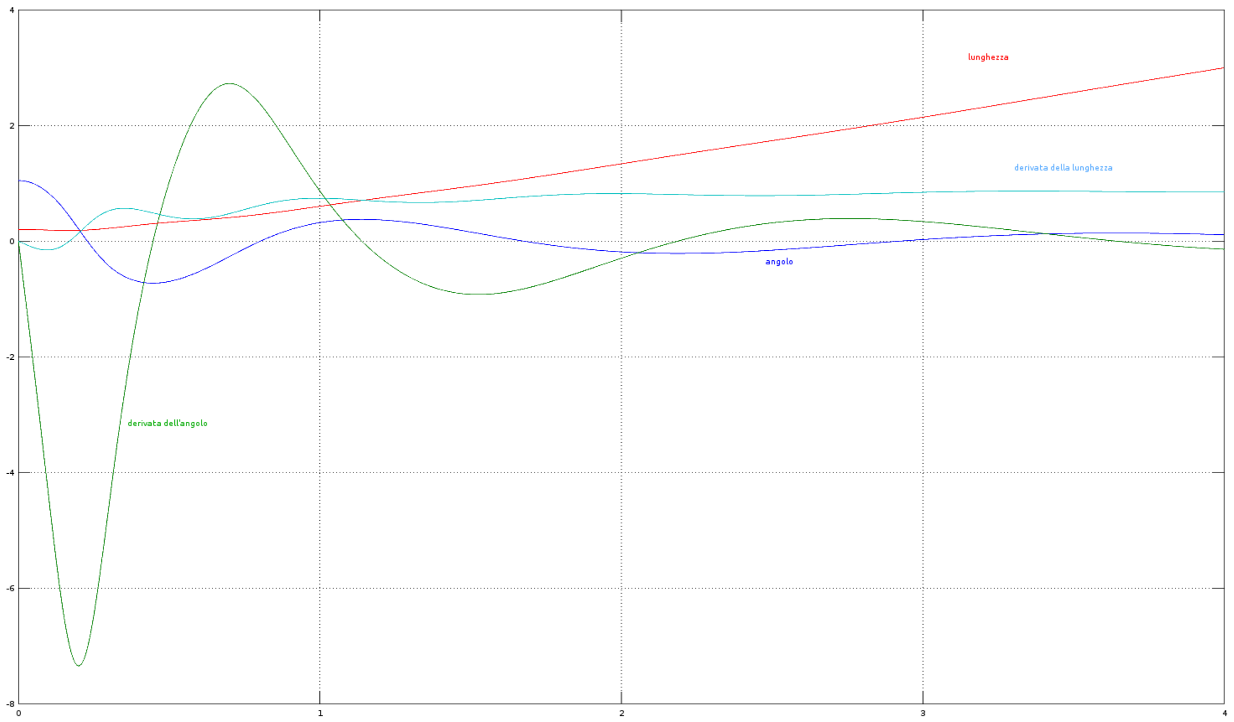
dove abbiamo tenuto conto che l'accelerazione della massa di destra ha due componenti, una centripeta: $\frac{(l\dot{\theta})^2}{l}$ e una dovuta all'allungamento del filo: $\ddot{l}$, mentre quella di sinistra ha solo la componente lungo il filo che è la stessa essendo i due corpi legati assieme.

**Soluzione.**

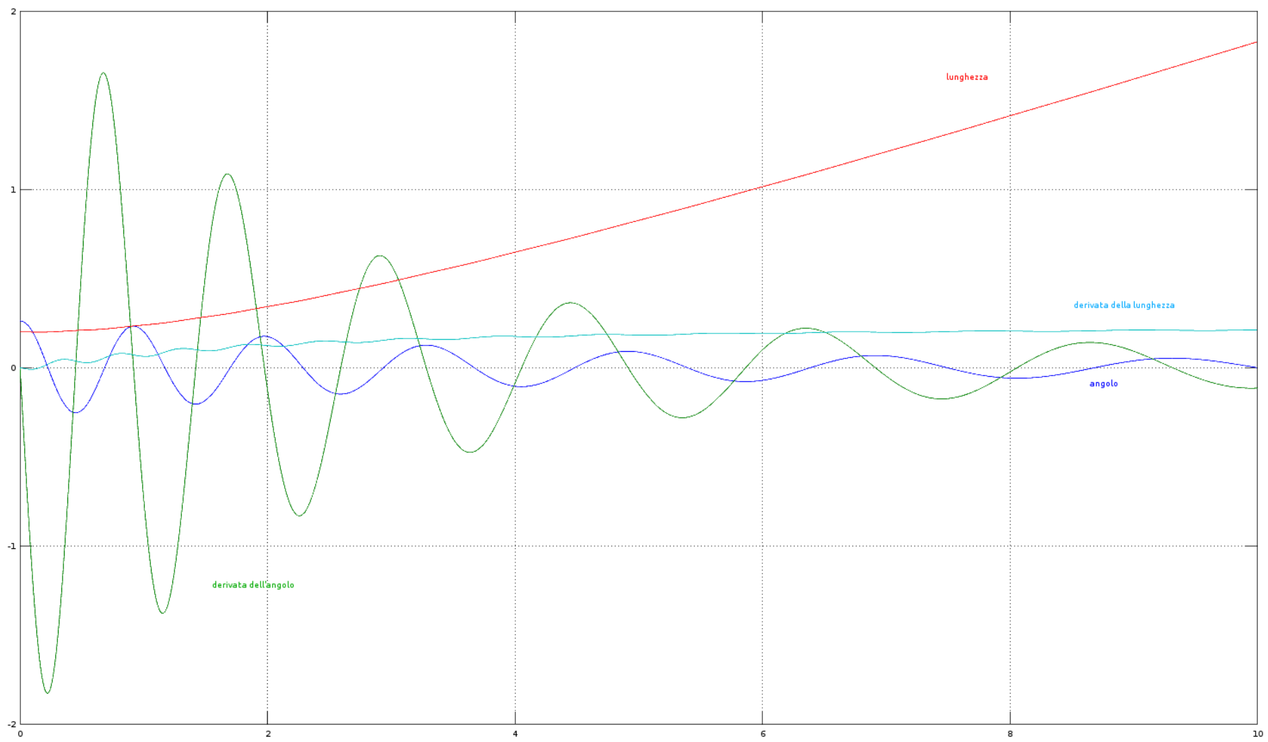
Le equazioni sono state risolte numericamente con Gnu Octave.
Di seguito sono riportati alcuni esempi dei risultati ottenuti. I grafici mostrano l'andamento nel tempo della lunghezza, dell'angolo e delle loro derivate.



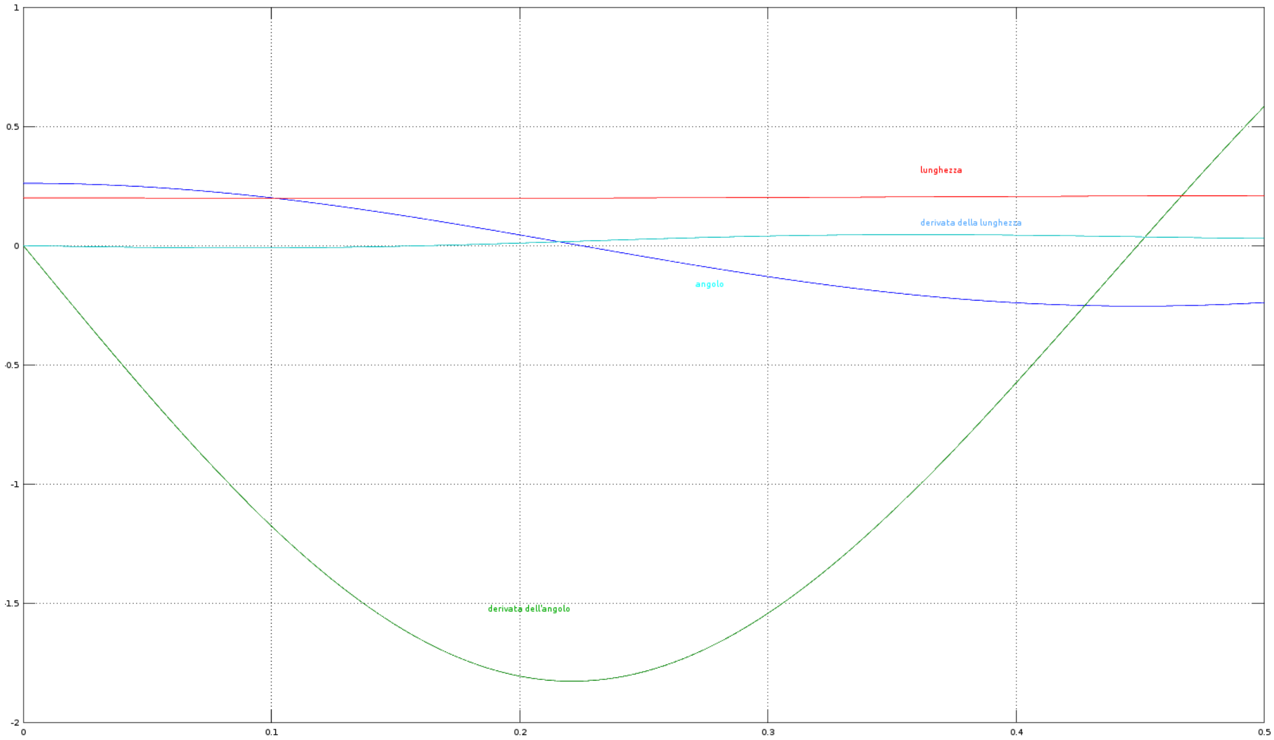

Condizioni iniziali $l_0 = 1m; \theta_0 = \pi/3\,; \dot{l}_0 = 0; \dot{\theta}_0 = 0$




Condizioni iniziali$l_0 = 0{,}2m; \theta_0 = \pi/3\,; \dot{l_0} = 0; \dot{\theta_0} = 0$




Condizioni iniziali$l_0 = 0{,}2m; \theta_0 = \pi/12\,; \dot{l_0} = 0; \dot{\theta_0} = 0$




Condizioni iniziali $l_0 = 0{,}2m; \theta_0 = \pi/12\,; \dot{l_0} = 0; \dot{\theta_0} = 0$

È evidente, in tutti i casi, che il pendolo di destra compie delle oscillazioni smorzate. La lunghezza inizialmente diminuisce, infatti la derivata è negativa, è ciò significa che il pendolo di sinistra trascina quello di destra, ma dopo breve è il pendolo di destra che trascina quello di sinistra e la lunghezza aumenta indefinitamente. Al termine delle oscillazioni le due masse si muoveranno di moto uniforme (la derivata della lunghezza ha evidentemente un asintoto orizzontale).