

ABSTRACT

In tale lavoro ci proponiamo di mettere in evidenza una analogia tra dipolo elettrico e dipolo magnetico, verificando tale analogia mediante il fenomeno di induzione elettromagnetica con l'acquisizione on - line dei dati, e definendo operativamente il momento di dipolo magnetico.

Richiamiamo in primo luogo il dipolo elettrico dicendo che esso è costituito da due cariche puntiformi uguali e contrarie e poste a distanza d tra loro.

Dicesi *momento di dipolo elettrico* il vettore avente come direzione quella del dipolo stesso, il verso dalla carica negativa a quella positiva e il modulo pari al prodotto $p = q \cdot d$.

Tale semplice sistema di cariche, nel mentre immerso in un campo elettrico uniforme subisce una coppia di forze, d'altro canto produce a distanza x dal centro del dipolo e lungo l'asse del segmento, un campo elettrico diretto in direzione normale all'asse, nel verso da $+q$ a $-q$, e di modulo

$$E = k \frac{2 a q}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{con} \quad a = \frac{d}{2} \quad (1)$$

La (1) si può scrivere:

$$E = k \frac{p}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

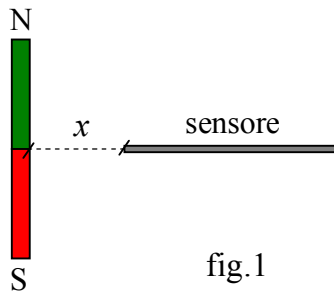
A grande distanza, per $x \gg a$, la (2) si può approssimare scrivendo:

$$E = k \frac{p}{x^3} \quad (3)$$

Tale relazione assume un significato particolare, perché pone in evidenza il fatto che a grande distanza il dipolo interviene nel campo attraverso il suo momento e non separatamente attraverso la carica q e la distanza d .

Da sottolineare anche che a grande distanza dal dipolo il campo va come $\frac{1}{x^3}$, e che quindi esso, all'aumentare di x , è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al campo elettrico centrale.

Ciò detto, abbiamo voluto verificare se anche per un dipolo magnetico vale una legge dello stesso tipo e mediante l'uso di un sensore di induzione magnetica e del software di acquisizione e gestione dei dati Science Work Shop, abbiamo rilevato i valori di induzione espressi in Gauss a varie distanze da un magnete rettilineo, ponendo il sensore in direzione assiale e in corrispondenza del punto medio del magnete (vedi fig.1) e digitando da tastiera i valori di x .

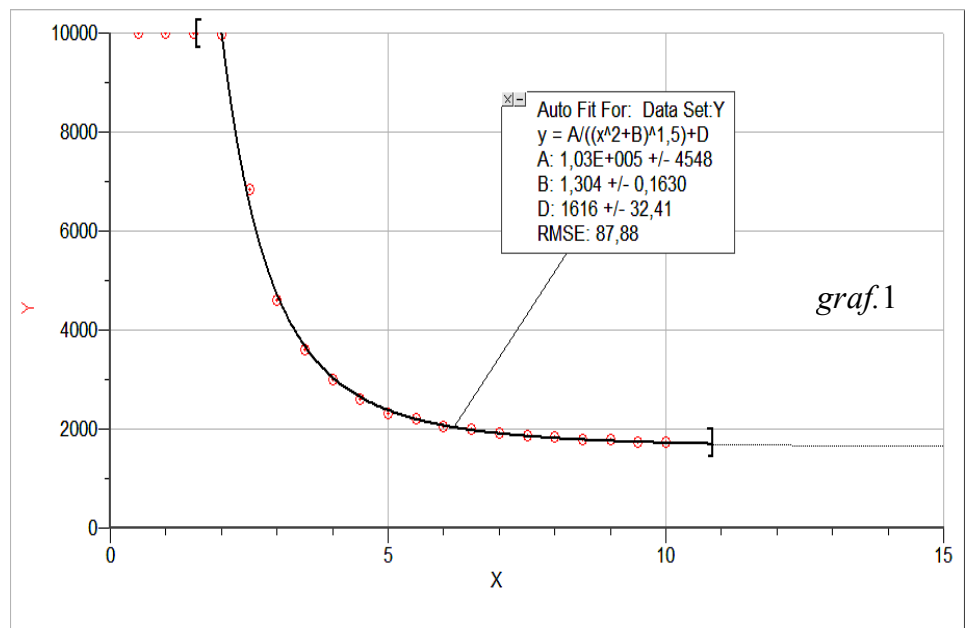


I dati ottenuti sono riportati nella tabella seguente, cui corrisponde il successivo il grafico "fittato" con Logger Pro.

fig.1

LOGGER PRO COLUMN DATA:

X	Y
0,5	9995,42
1	9995,42
1,5	9995,42
2	9975,89
2,5	6836,15
3	4599,75
3,5	3603,63
4	2993,26
4,5	2597,74
5	2324,29
5,5	2202,22
6	2065,49
6,5	1997,13
7	1909,24
7,5	1879,94
8	1840,88
8,5	1796,93
9	1796,93
9,5	1748,1
10	1728,57



Dal "curve fit" abbiamo escluso i primi tre dati ottenuti per piccole distanze dal magnete, per una evidente saturazione del sistema di acquisizione.

Il grafico ottenuto riproduce fedelmente una legge analoga alla (2) e questa analogia prescinde dalla costante che vi compare, il cui valore dipende essenzialmente dalle unità di misura adoperate.

Di conseguenza, almeno per quanto riguarda l'andamento del campo con la distanza, in direzione assiale, siamo portati a scrivere una legge del dipolo magnetico del tipo:

$$B = k \frac{p}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

con p momento e a semilunghezza del dipolo.

Successivamente abbiamo voluto rilevare il valore dell'induzione magnetica al variare della distanza, ma in direzione radiale (vedi fig.2), digitando da tastiera i valori di x .

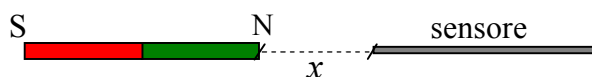


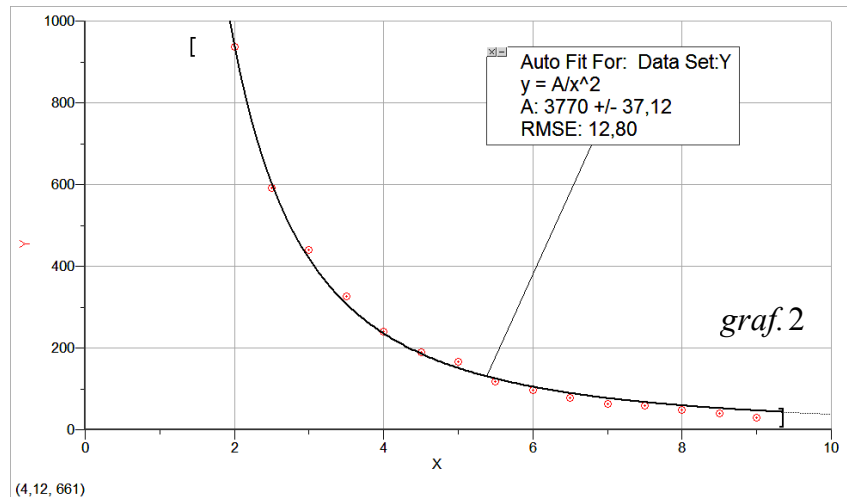
fig.2

Nella tabella seguente sono riportati i dati di induzione a varie distanze dall'estremità del magnete.

Il grafico successivo mostra una buona legge $B \propto \frac{1}{x^2}$ (5)

Logger Pro Column Data:

X	Y
Distanza (cm)	Strength (Gauss)
2	937,529
2,5	590,838
3	439,467
3,5	327,158
4	239,265
4,5	190,436
5	166,021
5,5	117,191
6	97,659
6,5	78,127
7	63,479
7,5	58,596
8	48,83
8,5	39,064
9	29,298



graf. 2

Per avere la conferma di una possibile variazione di B col quadrato della distanza, abbiamo sospeso il magnete ad una molla verticale e abbiamo rilevato i valori di B nel tempo, durante l'oscillazione verticale del magnete (vedi fig. 3).

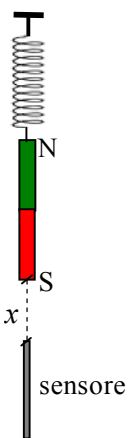
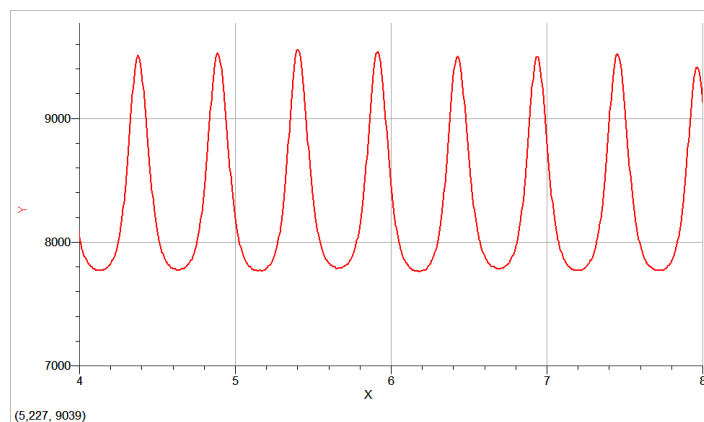
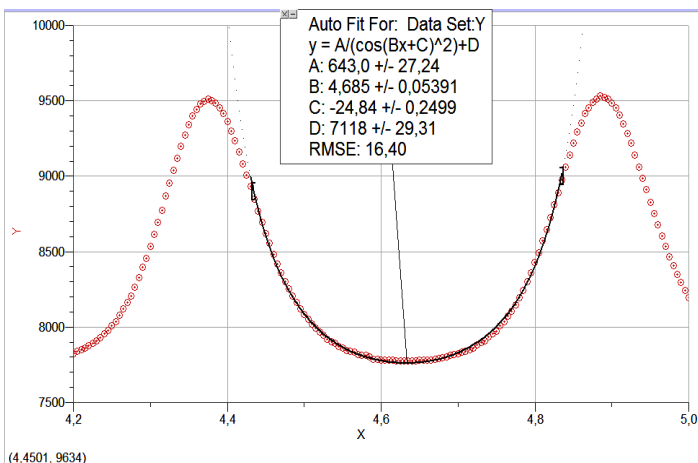


fig.3



graf.3

Il grafico "fittato" con Logger Pro all'interno di un periodo di oscillazione, mostra che il campo magnetico è inversamente proporzionale al quadrato della distanza x .



Il "curve fit" è riportato nel grafico a lato.

Infatti, tenendo conto del fatto che la molla è una molla elastica, il moto del magnete è un moto armonico e la distanza x , vista come posizione rispetto ad una origine coincidente con l'estremo del sensore, va con la legge del coseno.

graf. 4

Tale grafico, ottenuto mediante il "curve fit", presenta dei punti di discontinuità negli istanti di tempo in cui il coseno si annulla, e precisamente per $\omega t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, con k intero, e si accorda con i dati sperimentali nei punti abbastanza distanti dai picchi.

Passiamo ora all'ultima fase del nostro lavoro sperimentale.

Abbiamo posto in oscillazione un magnete in prossimità della sezione S di un avvolgimento e abbiamo rilevato, mediante un sensore in linea con il computer, la *f.e.m.* indotta ai capi dell'avvolgimento stesso (vedi fig. 4).

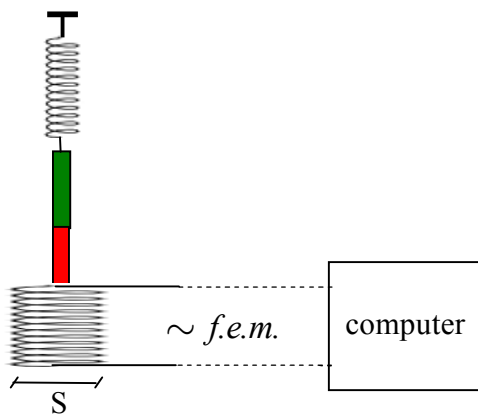


fig.4

Tale fenomeno di produzione di una d.d.p., mediante una semplice variazione di flusso del vettore induzione $\Phi(B)$ concatenato con un circuito elettrico, dicesi *induzione elettromagnetica*, ed è regolato dalla legge di Faraday -Neumann e legge di Lenz:

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi(B)}{dt} \quad (6)$$

Il segno negativo che compare nella (5), consiste appunto nella legge di Lenz ed esprime il fatto che la corrente indotta che circola nell'avvolgimento circola nel verso tale da produrre un campo magnetico che si oppone al dipolo oscillante.

In tal modo, nel nostro caso, l'oscillazione avviene sotto l'azione di quattro forze: la forza elastica della molla, la forza di gravità, la forza di attrito nell'aria e la forza del campo magnetico indotto dell'avvolgimento.

La foto mostra il dispositivo sperimentale nel quale è stato aggiunto, in parallelo al sensore, anche uno strumento tradizionale per una più convincente esposizione didattica.

In particolare, il magnete è stato appesantito da un paio di blocchetti allo scopo di aumentare il periodo di oscillazione e di rendere più "continuo" l'insieme dei dati.

Inoltre, per rendere l'oscillazione più stabile e meno "sporca", il magnete stesso è stato interposto tra due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 mediante due fili preventivamente già tesi (fig.5):

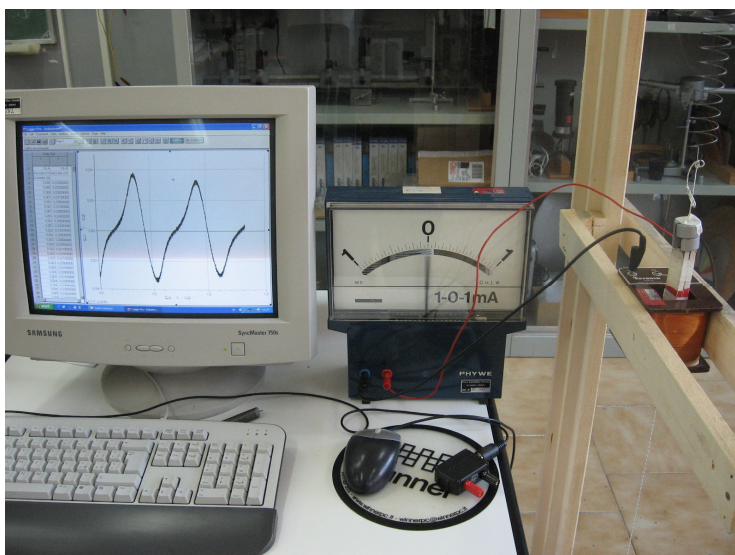


fig.5

Vogliamo ora esprimere la f.e.m. indotta applicando la (5) e tenendo conto del fatto che il moto del magnete è un moto armonico.

Certamente il flusso del campo magnetico in prossimità dell'avvolgimento è dato dal prodotto del modulo del vettore B per la sezione S della bobina.

Tale flusso è però variabile al variare di B in funzione della distanza x del magnete dalla sezione S . Possiamo pertanto scrivere:

$$\Phi(B) = k \frac{1}{x^2} S \quad (7)$$

Nella (7) l'unica grandezza variabile nel tempo è la distanza x tra magnete e bobina, e poiché l'oscillazione è armonica, ponendo l'origine delle distanze in corrispondenza della bobina, sarà senz'altro:

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \varphi)$$

con A ampiezza, ω pulsazione e φ fase del moto.

La (7) pertanto si scrive

$$\Phi(B) = k \frac{1}{A^2 \cos^2(\omega t \pm \varphi)} S \quad (8)$$

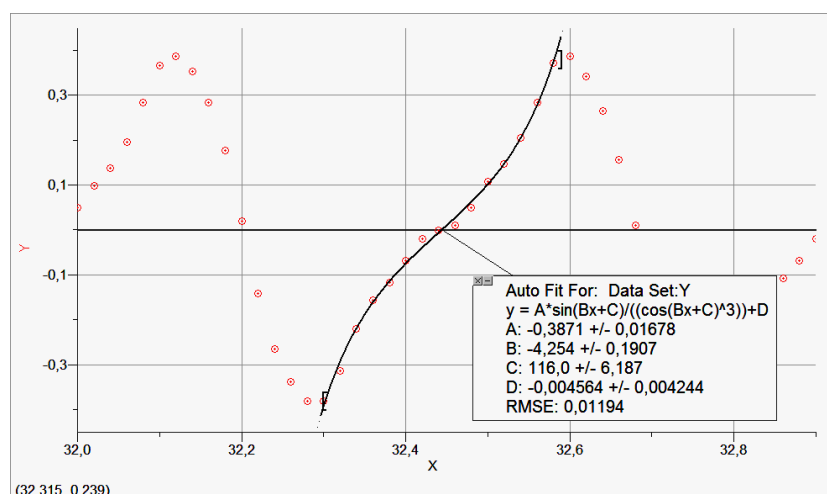
Derivando la (8) rispetto al tempo, si ha:

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{kS}{A^2} [\cos(\omega t \pm \varphi)]^{-2} = -2 \frac{kS}{A^2} \cdot [\cos(\omega t \pm \varphi)]^{-3} \cdot [-\sin(\omega t \pm \varphi)] \cdot \omega .$$

Indicando con χ la costante $2 \frac{kS}{A^2} \omega$, possiamo scrivere:

$$f.e.m. = \chi \frac{\sin(\omega t \pm \varphi)}{\cos^3(\omega t \pm \varphi)} \quad (9)$$

Riportiamo il grafico ottenuto della *f.e.m.* indotta.



graf.5

Anche in questo caso il grafico presenta discontinuità in corrispondenza degli istanti per i quali $\omega t = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, con k intero, e il "curve fit" è stato eseguito in uno degli intervalli tra due di tali discontinuità, tra loro contigue.

Abbiamo infine voluto mettere in evidenza e confermare come, nel fenomeno di induzione elettromagnetica, l'energia meccanica si trasformi in energia elettrica.

Facendo oscillare in aria il magnete, in assenza dell'avvolgimento, il moto è un moto armonico smorzato per la resistenza al moto opposta dal mezzo.

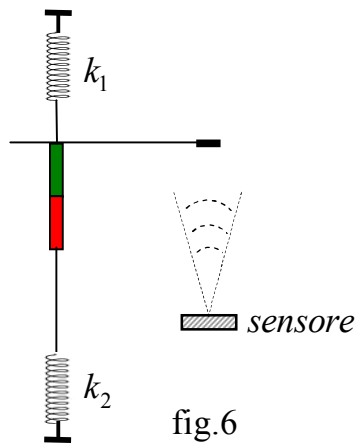
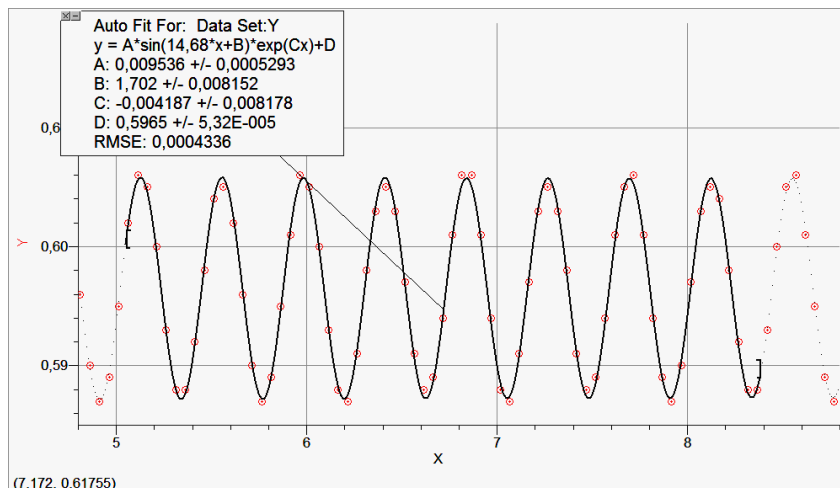


fig.6

La rilevazione è stata possibile applicando al magnete una leggera asticella sporgente, in modo da consentire al sensore di posizione di misurarne la distanza, istante per istante, all'interno del cono di azione del sensore stesso (vedi fig. 6).

Il grafico dell'oscillazione smorzata è stato quindi "fittato" con Logger - Pro in una zona limitata dell'oscillazione stessa e il "curve fit" ha messo in evidenza uno smorzamento del moto armonico secondo un buon esponenziale decrescente:



graf. 6

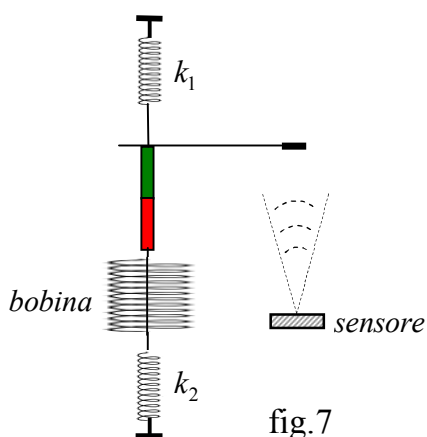


fig.7

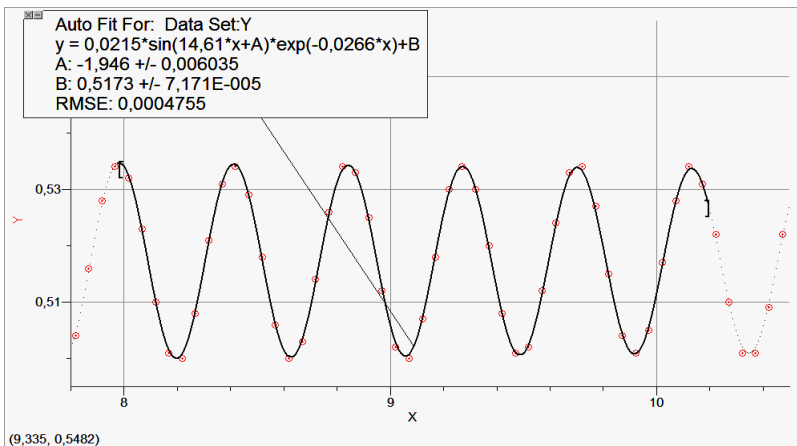
Abbiamo poi fatto oscillare il magnete in prossimità della bobina e in direzione longitudinale rispetto alla stessa (fig.7).

Il "curve fit" ha messo in evidenza un esponenziale decrescente con una costante di smorzamento in valore assoluto maggiore rispetto al caso precedente, ma anche una buona approssimazione dell'oscillazione in termini di moto armonico.

Per quanto riguarda lo smorzamento, abbiamo interpretato tale circostanza ammettendo che in tale secondo caso l'energia meccanica del sistema si dissipa non solo per attrito nell'aria, ma anche e soprattutto per produrre la corrente indotta nell'avvolgimento.

La variazione di flusso di induzione concatenato con il circuito produce quindi uno smorzamento più rapido del moto oscillatorio del magnete perché l'energia meccanica viene dissipata non soltanto per vincere le forze di attrito nell'aria, ma anche per contrastare un campo magnetico di verso opposto e produrre nel contempo corrente indotta nella bobina.

Quanto poi alla buona approssimazione del moto in moto armonico, essa si spiega col fatto che la forza elastica predomina sulle forze magnetiche di attrazione - repulsione dovute alla legge di Lenz, e col fatto che anche la notevole massa oscillante, e quindi l'inerzia, agisce in tal senso.



Il grafico a lato mostra il moto armonico smorzato in vicinanza dell'avvolgimento.

graf. 7

Per rendere più "credibile" e accettabile tale approssimazione, abbiamo verificato e confrontato il valore del periodo di oscillazione dell'oscillatore armonico con quello che si desume dal grafico "fittato" con Logger Pro:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \sim 0,426 \text{ s}$$

Tale valore, ottenuto formalmente in base ai dati di $m = 412 \text{ gr}$ e $k_e = k_1 + k_2 = 9,089 \frac{\text{gr}_p}{\text{mm}}$, coincide con il valore che si ottiene con l'analisi del grafico, sia in assenza dell'avvolgimento, sia in presenza di questo e quindi con effetto di induzione elettromagnetica.

Vogliamo infine affrontare il discorso sulla opportunità o sulla possibilità della definizione operativa, diretta o indiretta, di una unità di misura del momento di dipolo magnetico.

Partiamo dalla (4), ponendo in essa $k = 1$:

$$B = \frac{P}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Definiamo in tal modo un sistema assoluto nel quale la (10) può scriversi:

$$p = B \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

Una definizione di p , e una sua misura, può quindi essere data in termini di B e di dati geometrici.

Ricordando che x è la distanza dal magnete in direzione normale e lungo l'asse, e che a è la metà della sua lunghezza, supposto che esso sia rettilineo, chiamiamo *fattore di misurazione* \mathbb{K} il fattore

$$\mathbb{K} = (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$$

di modo che, variando la distanza x o la lunghezza del magnete, varia il fattore \mathbb{K} , e nello stesso tempo varia anche il valore dell'induzione magnetica B , ma non varia invece il prodotto $B \cdot \mathbb{K}$.

Il prodotto $B \cdot \mathbb{K}$, tra valore misurato di induzione e fattore di misurazione \mathbb{K} , descrive pertanto il modulo di momento di dipolo magnetico:

$$p = B \cdot \mathbb{K} \quad (12)$$

Volendo poi assegnare una direzione e un verso a tale momento, si può dire che la direzione è quella del magnete e il verso è quello da Sud a Nord del magnete stesso.

Facciamo però una critica a tale definizione, ovvero indichiamo quali debbano essere le limitazioni e quali siano quindi le approssimazioni.

Volendo assimilare il dipolo magnetico al dipolo elettrico, diciamo che il dipolo elettrico è un sistema di due cariche puntiformi, uguali e contrarie, poste a distanza d tra loro.

Il momento di dipolo elettrico è un vettore di modulo $q \cdot d$, avente come direzione quella passante per le due cariche e come verso quello diretto da $-q$ a $+q$.

L'approssimazione che bisogna, in tal caso, ammettere è che in realtà non esistono cariche puntiformi e quindi non è possibile individuare con esattezza una direzione del dipolo elettrico.

Anche nel caso magnetico, a parte la necessità di una definizione di massa magnetica e della impossibilità di una sua misurazione diretta, cosa che invece è possibile fare per una carica elettrica, appare evidente una analoga approssimazione: le proprietà magnetiche di un magnete naturale non sono localizzate ai suoi estremi, ma sono invece distribuite più o meno lungo tutta la barretta magnetizzata.

Solo per una barra magnetizzata, estremamente sottile e abbastanza lunga, possiamo accettare che le masse magnetiche siano puntiformi e localizzate agli estremi della barra stessa.

Fatte quindi tali approssimazioni, possiamo utilizzare la (11) per individuare le dimensioni e l'unità di misura operativa del momento di dipolo magnetico.

Le dimensioni:

$$[p] \equiv [B \cdot l^3] \equiv [m q^{-1} t^{-1} l^3]$$

L'unità di misura nel S.I. :

$$p \equiv \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3 \equiv \text{Wb} \cdot \text{m} \quad (13)$$

Volendo poi estendere alla legge di Coulomb l'analogia tra campo elettrico e campo magnetico, possiamo dire quanto segue.

Sperimentalmente risulta, come abbiamo visto, che per magneti rettilinei sottili e molto lunghi, la forza di attrazione e repulsione tra i poli prospicienti obbedisce abbastanza bene alla legge:

$$F \propto \frac{1}{r^2} \quad (14)$$

Ammettendo quindi che tale forza sia causata dalla " quantità " di magnetismo localizzata agli estremi dei magneti, indicando con m_{m1} e m_{m2} le *masse magnetiche* dei due dipoli, la legge di Coulomb del magnetismo si può scrivere:

$$F = k \frac{m_{m1} \cdot m_{m2}}{r^2} \quad (15)$$

Pertanto, anche la formula del campo magnetico centrale, per un magnete sottile e molto lungo, può essere scritta:

$$H = k \frac{m_m}{r^2} \quad (16)$$

A tal proposito però diciamo anche che, nel vuoto o nell'aria, l'intensità del campo magnetico H coincide in sostanza col vettore induzione magnetica B , a meno di una costante che dipende dalle unità di misura scelte.

Ne deriva che possiamo scrivere:

$$B = k \frac{m_m}{r^2} \quad (17)$$

Dalla (17) risulta quindi che, nel nostro sistema MKS assoluto, ponendo $k = 1$, la massa magnetica si misura in Wb.

Tale circostanza risulta anche dalla (13), giacché, ponendo in essa $p = m_m \cdot d$, deriva che:

$$m_m = \frac{p}{d} \frac{\text{Wb} \cdot \cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{m}}} \quad (18)$$

A conclusione del presente lavoro, possiamo in definitiva sintetizzare quanto segue.

Il momento di dipolo magnetico è una grandezza intrinseca del magnete, ma in realtà *l'osservabile* è l'induzione magnetica, rilevata mediante un sensore che utilizza l'effetto Hall.

La rilevazione di B , e quindi la definizione operativa di p , in linea di principio potrebbe essere fatta ponendo il sensore in una qualunque posizione rispetto al magnete.

La posizione del sensore che meglio "vede" le proprietà del dipolo è quella rappresentata in figura:

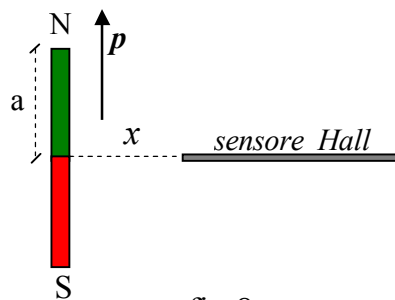


fig.8

La massa magnetica non viene definita e misurata direttamente, ma deriva dal dipolo.

Al contrario in elettrostatica è la carica elettrica, nel sistema MKSCb, ad essere definita e misurata direttamente, dando quindi luogo al momento di dipolo elettrico, di modulo pari a qd , come grandezza secondaria.

Tale differenza tra elettrostatica e magnetostatica è semplicemente dovuta alla quasi impossibilità di poter realizzare e riprodurre facilmente in laboratorio un campione indipendente di massa magnetica e al fatto, notevole, della non esistenza in natura del monopolo magnetico.

D'altra parte, però, la definizione operativa di momento di dipolo magnetico offerta dalla (10), secondo lo schema di fig. 8, e la conseguente definizione di massa magnetica, prescinde dalla non esistenza del monopolo magnetico, perché integra direttamente e compiutamente le proprietà di intrinseche del dipolo.

Una ultima nota.

Le misure fatte in presenza del campo magnetico terrestre sono state depurate del valore di tale campo, azzerando lo strumento di misura prima di ciascuna rilevazione.